

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Krümmungsprofil in Schwarz-Weiß-Bildern

Master's Thesis von Andreas Schindele

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Master of Science (M.Sc.)



Aufgabensteller:	PD Peter Massopust, Ph.D. Prof. Dr. Brigitte Forster-Heinlein
Betreuer:	PD Peter Massopust, Ph.D.
Abgabetermin:	13. November 2012

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Ort, Datum

Unterschrift

Abstract

In this work we consider the estimation of the curvature profile along the boundaries of digital objects in black-and-white images. For this reason we present the curvature estimator proposed in [RL11], which is based on the calculation of *maximal digital circular arcs* (MDCA) and called MDCA curvature estimator. In addition we extend this estimator to the λ -MDCA curvature estimator which considers more MDCA's for each boundary pixel and is therefore smoother than the MDCA curvature estimator.

Furthermore we provide a proof for the multigrid convergence of this curvature estimator with a speed of convergence of $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ for convex subsets in \mathbb{R}^2 with positive, continuous curvature profile. Until now it was not possible to prove the multigrid convergence of any curvature estimator.

Additionally we test the curvature estimator on different objects with known curvature profile. We can see that some objects have a speed of convergence close to the theoretical border of $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$. Furthermore the λ -MDCA curvature estimator provides better results than the MDCA curvature estimator, especially in corners.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Schätzung von Krümmungen entlang von Rändern digitaler Objekte in Schwarz-Weiß-Bildern. Hierfür wird der in [RL11] vorgeschlagene parameterfreie Krümmungsschätzer vorgestellt, der auf der Berechnung von *Maximalen Digitalen Kreisbögen* basiert (MDCA-Krümmungsschätzer). Dieser wurde außerdem zum λ -MDCA-Krümmungsschätzer erweitert, welcher für jeden Randpixel mehrere MDCA's betrachtet und deshalb glatter ist als der MDCA Krümmungsschätzer.

Zusätzlich wird die Mehrgitterkonvergenz des MDCA-Krümmungsschätzers mit einer Konvergenzgeschwindigkeit von $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ für konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^2 mit positivem, stetigem Krümmungsprofil bewiesen. Diese konnte für einen Krümmungsschätzer bislang noch nicht nachgewiesen werden.

Der Krümmungsschätzer wurde außerdem an verschiedenen Objekten mit bekanntem Krümmungsprofil getestet. Man sieht hier, dass es Objekte gibt, die an die theoretische Grenze der Konvergenzgeschwindigkeit von $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ herankommen. Außerdem liefert der λ -MDCA-Krümmungsschätzer vor allem bei Ecken bessere Ergebnisse als der MDCA-Krümmungsschätzer.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Bedeutung des Krümmungsprofils	5
1.2	Problemstellung	5
1.3	Beispiel	6
1.4	Überblick	6
2	Differentialgeometrische Grundlagen	8
2.1	Kurven im \mathbb{R}^2	8
2.2	Krümmung von Kurven	9
3	Grundlagen zur Bildverarbeitung	12
3.1	Schwarz-Weiß-Bilder	12
3.2	Segmentierung	13
4	Schätzung des Krümmungsprofils	15
4.1	Problemstellung	15
4.2	Verschiedene Ansätze zur Schätzung der Krümmung	15
5	Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen	20
5.1	Maximale Digitale Kreisbögen (MDCA)	20
5.2	Berechnung von MDCAs einer digitalen Kurve	21
5.3	MDCA-Krümmungsschätzer	24
6	Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers	26
6.1	Mehrgitterkonvergenz	26
6.2	Beweis der Mehrgitterkonvergenz des MDCA-Krümmungsschätzers	27
7	Experimentelle Ergebnisse	37
7.1	Beispielobjekte	37
7.2	Experimenteller Fehler	38
7.3	Laufzeit	40
7.4	Grenzen der Methode	41
8	Zusammenfassung	43
	Abbildungsverzeichnis	44
	Tabellenverzeichnis	45
	Algorithmenverzeichnis	45
	Literaturverzeichnis	46

1 Einleitung

Digitale Bilder sind heute allgegenwärtig. Verschiedene Objekte – zum Beispiel Organe im menschlichen Körper oder Maschinenelemente – werden zu wissenschaftlichen Zwecken aufgenommen und anschließend analysiert. Für die Analyse von Objekten in einem digitalen Bild müssen diese zuerst lokalisiert werden. Diesen Vorgang nennt man Segmentierung. Anschließend benötigt man Eigenschaften (engl. *features*), wie den Flächeninhalt des Objekts, die Länge der Kurve, die das Objekt umrahmt oder das Krümmungsprofil entlang dieser Kurve (vgl. [Her05]). Mithilfe dieser Eigenschaften lassen sich Informationen der Objekte ableiten. Diese Arbeit geht insbesondere auf die Bestimmung des Krümmungsprofils ein.

1.1 Bedeutung des Krümmungsprofils

Die Kenntnis des Krümmungsprofils wird in vielen Anwendungen benötigt. Beispielsweise taucht es bei der Berechnung der normalisierten Bieungsenergie (NBE) auf, die 1974 von *Young et al.* [YWB74] definiert wurde. Dabei ist NBE die Energie eines Objektes, die aufgewendet werden muss, um es vom Zustand mit minimaler Energie – also von einem Kreis mit gleichem Umfang wie das Objekt – in den aktuellen Zustand zu überführen [VV93]. Mithilfe der NBE kann man unter anderem Aussagen über die Chemoresistenz von Krebszellen [PPC12] und über die Wanddeformation der linken Herzkammer zur Beurteilung der hämodynamischen Auswirkung kritischer Koronarstenosen [DLS91] treffen.

Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die automatische Erkennung von Objekten, wie die Gesichtserkennung [Gor92] oder die Identifizierung von Kieselalgen als Indikator der ökologischen Güte von Gewässern [JWR05]. Im Allgemeinen werden für die Objekt- und Formerkennung dominante Punkte betrachtet. Diese sind unter anderem Ecken oder Punkte mit Unstetigkeiten in der Krümmung [AB86]. Ecken können in digitalen Bildern als Punkte mit hoher diskreter Krümmung definiert werden [Her05].

1.2 Problemstellung

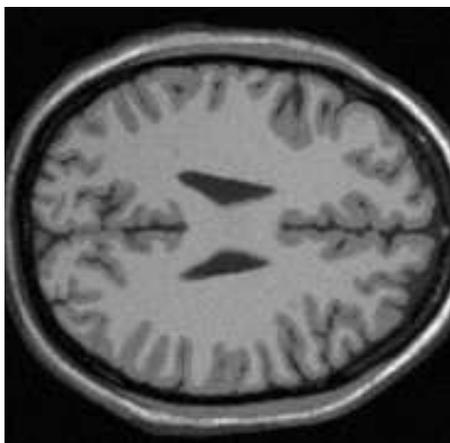
Die Bestimmung der Krümmung in digitalen Bildern ist eine nichttriviale Aufgabe. Durch die Digitalisierung von realen Objekten geht Information verloren. Das Krümmungsprofil

1 Einleitung

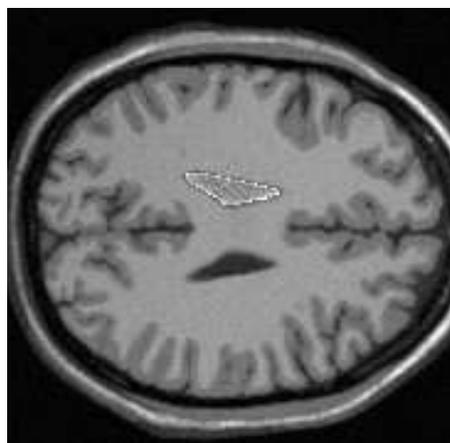
entlang der Kurve, die das reale Objekt umfasst, kann also nicht exakt bestimmt werden. Ziel dieser Arbeit ist eine möglichst exakte Schätzung dieser Krümmung. Hierfür verwenden wir den Krümmungsschätzer, der vor kurzem in [RL11] vorgestellt wurde. Dieser basiert auf der Berechnung von *Maximalen Digitalen Kreisbögen* (engl. *Maximal Digital Circular Arc – MDCA*).

1.3 Beispiel

Als einführendes Beispiel betrachten wir die computertomographische Aufnahme des menschlichen Gehirns¹ (siehe Abbildung 1.1 (a)). Dabei interessiert uns die echte Krümmungsverteilung entlang des Randes der linken Hirnkammer. Diese können wir allerdings nur schätzen, da lediglich ein schlecht aufgelöstes Bild vorliegt. Hierfür wird die Hirnkammer zuerst lokalisiert (Abbildung 1.1 (b)).



(c) CT eines menschlichen Gehirns



(d) Segmentierung des linken Ventrikels

Abbildung 1.1: Einführendes Beispiel

Anschließend wird der MDCA-Krümmungsschätzer auf die lokalisierte Menge angewandt. Man erhält das Krümmungsprofil (Abbildung 1.2 (a)) und die jeweilige Krümmung in den einzelnen Randpixeln grafisch dargestellt (Abbildung 1.2 (b)).

1.4 Überblick

In den folgenden beiden Kapiteln behandeln wir zunächst einige Grundlagen in der Differentialgeometrie und in der Bildverarbeitung. Diese sind erforderlich, um die Pro-

¹Bildnachweis: Präsentationsfolien der Vorlesung *Computer Aided Medical Procedures* von Prof. Dr. Nassir Navab an der Technischen Universität München

1 Einleitung

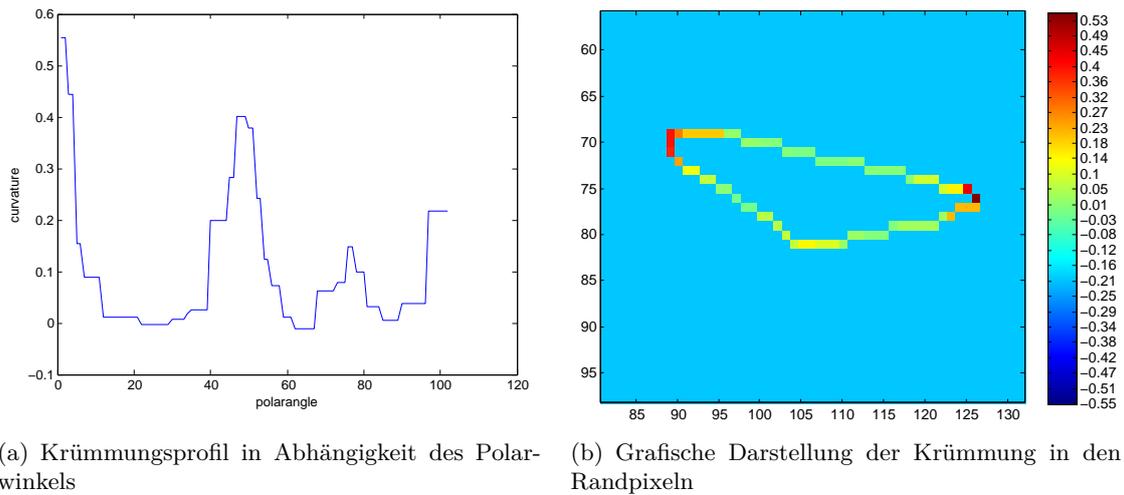


Abbildung 1.2: Ergebnisse des Krümmungsschätzers

blemstellung in Kapitel 4 exakt formulieren zu können. In Kapitel 4 wird außerdem eine kurze Zusammenfassung verschiedener Ansätze zur Lösung des Problems gegeben, wobei wir in Kapitel 5 dann den MDCA-Krümmungsschätzer sowie den neuen λ -MDCA-Krümmungsschätzer vorstellen. Anschließend wird in Kapitel 6 die Mehrgitterkonvergenz dieses Krümmungsschätzers mit Konvergenzgeschwindigkeit $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ nachgewiesen. Zuletzt testen wir den Krümmungsschätzer an verschiedenen Beispielobjekten, von denen wir die exakte Krümmung kennen.

2 Differentialgeometrische Grundlagen

Zunächst benötigen wir Konzepte der Differentialgeometrie, um Kurven und deren Krümmung im kontinuierlichen Raum \mathbb{R}^2 zu definieren (vgl. [Hof09]). Außerdem werden Eigenschaften gefolgert, die man für die exakte Definition des Krümmungsschätzers und für den Beweis der Mehrgitterkonvergenz benötigt.

2.1 Kurven im \mathbb{R}^2

Definition 2.1.1. (Kurve, Tangentialvektor, Spur)

1. Die Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma \in C^2([a, b])$ heißt Kurve.
2. Der Vektor $\dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t)$ wird Tangentialvektor von γ in t genannt.
3. Die Menge $S(\gamma) := \{\gamma(t) | t \in [a, b]\}$ heißt Spur von γ .

Im Folgenden betrachten wir nur Kurven im \mathbb{R}^2 also ($n = 2$).

Definition 2.1.2. (Reguläre Kurve) Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt regulär, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Definition 2.1.3. (2-Norm) Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann heißt

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

die 2-Norm von x .

Definition 2.1.4. (Länge einer Kurve) Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nennt man

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

die Länge von γ .

Definition 2.1.5. (Parameterwechsel) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve, $h : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ eine Kurve mit gleicher Spur wie γ . Dabei nennt man h einen Parameterwechsel und $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ .

Lemma 2.1.6. Sei $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ , dann gilt: $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$

Beweis. Sei $h : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ein Diffeomorphismus, dann ist

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma \circ h) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\dot{\gamma} \circ h(\tau)\| \cdot |\dot{h}(\tau)| d\tau = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = L(\gamma) \quad \square$$

Definition 2.1.7. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nennt man nach Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ für alle $t \in [a, b]$.

Lemma 2.1.8. Jede reguläre Kurve kann man nach Bogenlänge umparametrisieren.

Beweis. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$. Dann ist h monoton und stetig differenzierbar, also ein Diffeomorphismus. Und für $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h^{-1}$ gilt:

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = \|(\dot{\gamma} \circ h^{-1})h^{-1}\| = \|(\dot{\gamma} \circ h^{-1}) \frac{1}{(\dot{h} \circ h^{-1})}\| = \frac{\|(\dot{\gamma} \circ h^{-1})\|}{\|(\dot{h} \circ h^{-1})\|} = 1 \quad \square$$

2.2 Krümmung von Kurven

Definition 2.2.1. (Tangentenvektor, Normale) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, dann ist $T(t_0) := \frac{\dot{\gamma}(t_0)}{\|\dot{\gamma}(t_0)\|}$ der Einheits Tangentenvektor und $N(t_0) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t_0)$ die Einheitsnormale von γ am Punkt $\gamma(t_0)$.

Im Folgenden schreiben wir als Argument von nach Bogenlänge parametrisierten Kurven die Bogenlänge s und $\gamma'(s) := \frac{d}{ds}\gamma(s)$.

Definition 2.2.2. (Krümmung) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt $\kappa(s_0) := \langle N(s_0), \gamma''(s_0) \rangle = \pm \|\gamma''(s_0)\|$ Krümmung von γ in s_0 .

Bemerkung 2.2.3. Wegen

$$\langle N(s_0), \gamma''(s_0) \rangle + \langle N'(s_0), \gamma'(s_0) \rangle = \frac{d}{ds} \langle N(s_0), \gamma'(s_0) \rangle = 0$$

gilt auch

$$\kappa(s_0) = - \langle N'(s_0), \gamma'(s_0) \rangle$$

Satz 2.2.4. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\kappa(s_0)$ ist Krümmung von γ in s_0 .

2 Differentialgeometrische Grundlagen

- (ii) Der Kreis $\mathcal{K}(s_0)$ mit dem Radius $R(s_0) = 1/\kappa(s_0)$ und dem Mittelpunkt $\gamma(s_0) + R(s_0)N(s_0)$ nähert γ lokal um s_0 bestmöglich an. (D.h. für $s \in [a, b]$ mit $s \rightarrow s_0$ konvergieren die Kreise durch $\gamma(s)$ und $\gamma(s_0)$ mit Mittelpunkt auf der Geraden $\{\gamma(s_0) + \alpha N(s_0) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ gegen $\mathcal{K}(s_0)$). Man nennt $\mathcal{K}(s_0)$ Schmiegkreis von γ in s_0 .
- (iii) Sei $\phi(s_0)$ definiert durch $N(s_0) = -(\cos(\phi(s_0)), \sin(\phi(s_0)))$. Dann ist $\kappa(s_0) = \frac{d\phi}{ds}(s_0)$

Beweis.

1. (i) \Leftrightarrow (ii) (vgl. [Hof09]) Sei $s \in [a, b]$, und $\mathcal{K}'(s)$ sei der Kreis durch $\gamma(s)$ und $\gamma(s_0)$ mit Mittelpunkt auf der Geraden $\{\gamma(s_0) + \alpha N(s_0) | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt für Radius $r(s)$ von $\mathcal{K}'(s)$ und dem Winkel $\varphi(s)$ zwischen $N(s_0)$ und $\gamma(s_0) - \gamma(s)$ mithilfe des Satzes von Thales:

$$\cos\varphi = \langle N(s_0), \frac{\gamma(s_0) - \gamma(s)}{\|\gamma(s_0) - \gamma(s)\|} \rangle = \frac{\|\gamma(s_0) - \gamma(s)\|}{2r}$$

Und mit der Taylorentwicklung von $\gamma(s)$ um s_0 ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \langle N(s_0), \frac{\gamma''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \mathcal{O}(s - s_0)^3 \rangle = \frac{\|\gamma(s_0) - \gamma(s)\|^2}{2r} \\ & \Leftrightarrow \langle N(s_0), \gamma''(s_0) + \mathcal{O}(s - s_0) \rangle = \frac{\|\gamma(s_0) - \gamma(s)\|^2}{r(s - s_0)^2} \end{aligned}$$

und mit $s \rightarrow s_0$ folgt

$$\langle N(s_0), \gamma''(s_0) \rangle = \frac{\|\dot{\gamma}(s_0)\|^2}{r} = \frac{1}{r}$$

Die Rückrichtung folgt analog.

2. (i) \Leftrightarrow (iii) Es gilt wegen Bemerkung 2.2.3

$$\begin{aligned} \kappa(s_0) & := - \langle N'(s_0), \gamma'(s_0) \rangle = - \langle N'(s_0), T(s_0) \rangle \\ & = \langle \begin{pmatrix} -\sin(\phi(s_0)) \\ \cos(\phi(s_0)) \end{pmatrix} \frac{d\phi}{ds}(s_0), T(s_0) \rangle = \frac{d\phi}{ds}(s_0) \langle T(s_0), T(s_0) \rangle = \frac{d\phi}{ds}(s_0) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2.5. Aus Satz 2.2.4 (ii) folgt auch, dass die Krümmung einer Kurve γ in einem Punkt $\gamma(s_0)$ unabhängig von der Parametrisierung ist und nur von der Spur von γ abhängt.

Lemma 2.2.6. Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Spur $S(\gamma) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\}$. Dann ist

$$\kappa(s_0) = \frac{g_{xx}g_y - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x}{(g_x^2 + g_y^2)^{3/2}}$$

die Krümmung $\kappa(s_0)$ von γ im Punkt $\gamma(s_0) = (x, y)^T$.

2 Differentialgeometrische Grundlagen

Beweis. Wegen Bemerkung 2.2.3 gilt:

$$\kappa(s_0) = - \langle N'(s_0), \gamma'(s_0) \rangle = - \langle N'(s_0), T(s_0) \rangle$$

und mit $n := N(s_0)$, $t := T(s_0)$, $n_x := \frac{dn^T}{dx}$, $n_y := \frac{dn^T}{dy}$ und $\nabla n := (n_x, n_y)^T$ und wegen $\frac{d}{ds}(x, y)^T = \gamma'(s_0) = t$ folgt

$$\kappa(s_0) = \langle n_x \frac{dx}{ds} + n_y \frac{dy}{ds}, t \rangle = t^T \cdot \nabla n \cdot t$$

Wegen $\langle \nabla g, t \rangle = g_x \frac{dx}{ds} + g_y \frac{dy}{ds} = \frac{dg}{ds} = 0$ steht $\nabla g(x, y)$ senkrecht auf t und somit gilt $\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = n$, also

$$\nabla n = \nabla \left(\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \right) = \frac{\nabla(\nabla g) \cdot \|\nabla g\| - \nabla g \cdot \nabla \|\nabla g\|}{\|\nabla g\|^2}.$$

Es folgt

$$\nabla n \cdot t = \frac{\nabla(\nabla g) \cdot t}{\|\nabla g\|} - \frac{\nabla \|\nabla g\| \cdot \langle \nabla g, t \rangle}{\|\nabla g\|^2} = \frac{\nabla(\nabla g) \cdot t}{\|\nabla g\|}.$$

Außerdem gilt $t = \frac{(g_y, -g_x)^T}{\|\nabla g\|}$, also

$$\begin{aligned} \kappa(s_0) &= \frac{t^T \cdot \nabla(\nabla g) \cdot t}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\|\nabla g\|^3} \cdot (g_y, -g_x) \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_y \\ -g_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{g_{xx}g_y - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x}{(g_x^2 + g_y^2)^{3/2}} \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.2.7. (Rand einer Menge) Sei X Teilmenge eines metrischen Raumes (\mathcal{X}, d) , dann heißt $x \in \mathcal{X}$ Randpunkt von X , falls für jede Umgebung U von x gilt: $U \cap X \neq \emptyset$ und $U \cap X \neq U$. $\partial X := \{x \in \mathcal{X} : x \text{ ist Randpunkt von } X\}$ heißt Rand von X .

Definition 2.2.8. (Konvexe Kurve) Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine nichtleere, beschränkte und konvexe Menge und γ eine Kurve mit der Spur $S(\gamma) \subseteq \partial X$, dann heißt γ konvexe Kurve.

Satz 2.2.9. Sei $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, konvexe Kurve nach Bogenlänge parametrisiert und $h : [\phi_1, \phi_2] \rightarrow [s_1, s_2]$ ein Diffeomorphismus, sodass $n(h(\phi)) = -(\cos \phi_1, \sin \phi_1)$. Dann gilt:

$$L(\gamma) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\kappa(h(\phi))} d\phi$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{h^{-1}(s_1)}^{h^{-1}(s_2)} |h'(\phi)| d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{ds}{d\phi}(\phi) d\phi \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\frac{d\phi}{ds}(h(\phi))} d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\kappa(h(\phi))} d\phi \quad \square \end{aligned}$$

3 Grundlagen zur Bildverarbeitung

Um später Krümmungsschätzer für Bilder angeben zu können, benötigen wir zunächst noch einige Grundlagen aus der mathematischen Bildverarbeitung. Dazu wird in diesem Kapitel der mathematische Begriff eines Bildes eingeführt und dessen Digitalisierung dargestellt. Außerdem lernen wir grundlegende Konzepte der Bildverarbeitung wie die Segmentierung kennen.

3.1 Schwarz-Weiß-Bilder

Wir nehmen an, dass unser Modell einem *echten* Bild zugrunde liegt. Dieses lässt sich wie folgt definieren:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, I \in L^1(\Omega) \quad (3.1)$$

Der Funktionswert $I(p)$ bestimmt den Graustufenwert im Bildpunkt p (zum Beispiel: 0=schwarz, 1=weiß). Im Folgenden sei der Definitionsbereich $\Omega = [0, 1]^2$ (andere rechteckige Bereiche erhält man durch elementare Transformationen).

Um die Digitalisierung des Bildes mathematisch zu beschreiben, gibt es verschiedene Modelle. Wir beschränken uns auf folgendes:

Definition 3.1.1. Für ein $n \in \mathbb{N}$ teilen wir $\Omega = [0, 1]^2$ in n^2 quadratische Bereiche. Jeder dieser Bereiche besitzt die Länge $\frac{1}{n}$:

$$\Omega_n(i, j) := [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n], \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Diese Bereiche nennt man *Pixel*, n nennt man *Auflösung* des digitalisierten Bildes und Ω_n ist die Menge aller Pixel im Bild. Das digitale Bild ist jetzt durch die Abbildung

$$I_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}, I_n(\Omega_n(i, j)) := n^2 \int_{\Omega_n(i, j)} I(p) dp$$

definiert. I_n kann also als eine $n \times n$ -Matrix angesehen werden.

Bemerkung 3.1.2. In der Realität werden bei der Speicherung des Bildes zusätzlich die Grauwerte diskretisiert. Das heißt I_n kann nur endlich viele verschiedene Werte annehmen (normalerweise $[0, \dots, 2^k - 1]$, bzw. um im Bereich $[0, 1]$ zu bleiben: $[0, 2^k - 1]/(2^k - 1)$). Man nennt diesen Vorgang *Quantisierung*. Hierauf wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

3 Grundlagen zur Bildverarbeitung

Bemerkung 3.1.3. Wir können den Pixel $\Omega_n(i, j)$ auch durch den Mittelpunkt des Pixels $M(\Omega_n(i, j)) = p_n^{i,j} = (\frac{i-1/2}{n}, \frac{j-1/2}{n})$ identifizieren.

Definition 3.1.4. (Nachbarschaft eines Pixels)

$$N_4(p_n^{i,j}) := \{p_n^{i+1,j}, p_n^{i,j+1}, p_n^{i-1,j}, p_n^{i,j-1}\}$$

heißt 4 - Nachbarschaft und

$$N_8(p_n^{i,j}) := \{p_n^{i+1,j}, p_n^{i+1,j+1}, p_n^{i,j+1}, p_n^{i-1,j+1}, p_n^{i-1,j}, p_n^{i-1,j-1}, p_n^{i,j-1}, p_n^{i+1,j-1}\}$$

heißt 8 - Nachbarschaft des Pixels $p_n^{i,j}$. Im Folgenden bezeichnen wir zwei Pixel p und q als benachbart, falls $p \in N_4(q)$.

Definition 3.1.5. (Digitaler Pfad) Ein k -verbundener digitaler Pfad P von Pixel p nach Pixel q ist eine Folge von Pixeln $p = p_0, \dots, p_n = q$, sodass $p_i \in N_k(p_{i-1})$ für alle $1 \leq i \leq n$, hierbei ist $k \in \{4, 8\}$. Die Spur von P ist $S(P) := \{p_i | 0 \leq i \leq n\}$.

Definition 3.1.6. (Zusammenhängende Pixelmenge) Sei $P \subset \Omega_n$ eine Teilmenge der Pixel in einem digitalen Bild. Zwei Pixel $p, q \in P$ heißen zusammenhängend in P , falls es einen 4-verbundenen digitalen Pfad von p nach q gibt, der komplett in P liegt. Für jedes $p \in P$ ist die Menge aller mit P zusammenhängenden Punkte eine Zusammenhangskomponente von P . P heißt zusammenhängende Pixelmenge, falls P nur eine Zusammenhangskomponente besitzt.

Definition 3.1.7. (Pixelkante) Die Schnittmenge zweier benachbarter Pixel $p = \Omega_n^1$ und $q = \Omega_n^2$ heißt Pixelkante.

3.2 Segmentierung

Unter Segmentierung versteht man das inhaltliche Zusammenfassen zusammenhängender Pixel in einem digitalen Bild. Dadurch will man zum Beispiel einen bestimmten Gegenstand oder ein Objekt von seinem Hintergrund abgrenzen. Für die Segmentierung eines bestimmten Objektes gibt es verschiedene Verfahren. Eine Möglichkeit ist das Finden von Kanten, welche durch abrupte Änderung der Grauwerte charakterisiert wird [GW08]. Diese Kanten grenzen die verschiedenen Regionen voneinander ab. Ein weiteres Verfahren ist das *Region-Growing*. Dieses erlaubt die Segmentierung eines bestimmten Objektes, durch Wahl eines Pixels auf diesem Objekt. Als Beispiel wird im Folgenden näher auf das *Region-Growing*-Standardverfahren [Zuc76] eingegangen.

Definition 3.2.1. Ein Pixel $p \in \Omega_n$ heißt homogen zu einer Teilmenge $P \subset \Omega_n$ bezüglich dem Grenzwert T , falls

$$|I_n(p) - \mu(P)| \leq T.$$

Hierbei ist $\mu(P) := \frac{\sum_{p \in P} I_n(p)}{|P|}$, wobei $|P|$ die Anzahl der Pixel in P ist. Eine Menge $P \subset \Omega_n$ heißt homogen bezüglich dem Grenzwert T , falls

$$\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} |I_n(p) - \mu(P)| \leq T.$$

Algorithmus 3.2.2. (*Region-Growing*)

INPUT: Startpixel p_0 , Grenzwert T

OUTPUT: Homogene Pixelmenge P um den Startpixel p_0

1. Initialisiere $P := \{p_0\}$, $Q := N_4(p_0)$, $V := \{p_0\}$
2. Solange $Q \neq \emptyset$
 - 2.1. Wähle $q \in Q$ beliebig
 - 2.2. Falls q homogen zu P bezüglich T :
Setze $Q := (Q \setminus q) \cup (N_4(q) \cap \bar{V})$, $P := P \cup \{q\}$, $V := V \cup \{q\}$
 - 2.3 Sonst:
Setze $Q := Q \setminus q$, $V := V \cup \{q\}$

Das *Region-Growing*-Verfahren findet zu einem gegebenem Startpixel die homogene Menge $P_n(X)$. Im besten Fall ist $P_n(X)$ die Menge, die das Objekt X beschreibt, welche wie in Definition 3.2.3 charakterisiert werden kann. Um dies zu erreichen, wurde das Verfahren von mehreren Autoren verbessert [AB94],[HK98]. Außerdem ist es wichtig, dass man das Bild vor der Segmentierung von Rauschen befreit (*preprocessing*). Darauf wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

Die Segmentierung eines Objektes X ist dann optimal bzw. exakt, wenn sie die folgende Menge liefert:

Definition 3.2.3. (*Gauß-Diskretisierung*) Sei $X \in \Omega$ eine nichtleere, zusammenhängende Menge, dann heißt

$$D_n(X) := \{\Omega_n(i, j) | p_n^{i,j} \in X\}$$

die Gauß-Diskretisierung von X zur Auflösung n . $D_n(X)$ ist eine zusammenhängende Pixelmenge.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Menge $P_n(X)$, die sich aus der Segmentierung ergibt, identisch ist mit der Gauß-Diskretisierung von X . Wir gehen also von einem störungsfreien Bild aus, dessen Segmentierung eine möglichst exakte Annäherung an das echte Objekt liefert.

4 Schätzung des Krümmungsprofils

4.1 Problemstellung

Wir gehen von einem digitalen Bild aus, in dem bereits ein Objekt segmentiert wurde. Das reale, exakte Objekt sei durch die Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Das Ziel in diesem Kapitel ist die Schätzung des Krümmungsprofils entlang von ∂X , also die Krümmung der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $S(\gamma) = \partial X$. Wir definieren im Folgenden die Krümmung am Punkt $x = \gamma(t)$ bzgl. der Menge X mit $\kappa(X, x) := \kappa(t)$. Falls klar ist, um welche Menge X es sich handelt, schreiben wir auch nur $\kappa(x)$. Unsere Problemstellung lautet dann wie folgt.

- **Gegeben:** Eine nichtleere, zusammenhängende Menge von Pixeln $P_n(X) \subset \Omega_n := \{\Omega_n(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\}$, die sich aus der Segmentierung des Objekts X mit Auflösung n ergibt.
- **Gesucht:** Möglichst gute Schätzung des Krümmungsprofils $\kappa(X, x)$, $x \in \partial X$, entlang des exakten Objekts unter der
- **Annahme:** $P_n(X)$ entsteht durch Gauss-Diskretisierung aus dem Objekt $X \in \Omega$, also $P_n(X) = D_n(X)$ (vgl. Definition 3.2.3). Das heißt, die Segmentierung ist bezüglich der Auflösung n exakt.

4.2 Verschiedene Ansätze zur Schätzung der Krümmung

Um einen Krümmungsschätzer einer zusammenhängenden Pixelmenge $P \subset \Omega_n$ zu bestimmen, muss man sich zunächst überlegen, wie man den Rand von P definiert. Hierbei gibt es folgende zwei Möglichkeiten:

Definition 4.2.1. (*Rand einer zusammenhängenden Pixelmenge*)

(a) Der Rand von P ist die Menge der Pixel $p \in P$, für die gilt:

$$\exists q \in \Omega_n \setminus P : q \in N_4(p)$$

Hierbei ist der Rand von P die Spur eines 8-verbundenen digitalen Pfades (siehe Abbildung 4.1 (a)).

(b) Der Rand von P ist die Menge der Pixelkanten, die sowohl an einen Pixel $p \in P$ als auch an einen Pixel $q \notin P$ angrenzen (siehe Abbildung 4.1 (b)).

4 Schätzung des Krümmungsprofils

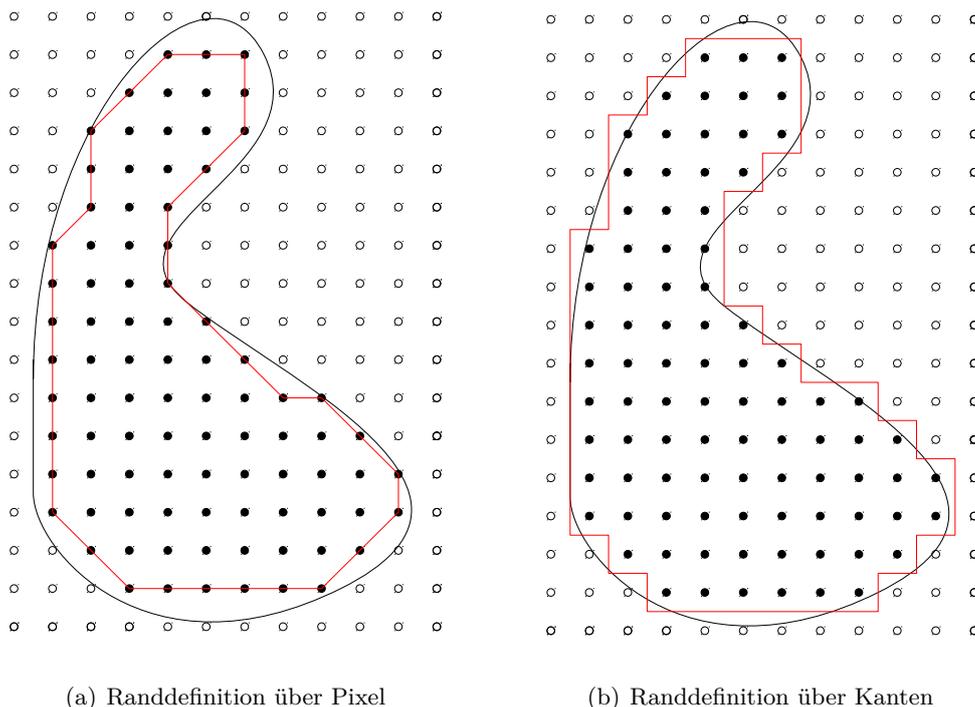


Abbildung 4.1: Definition des Randes

Ein erster naiver Ansatz ist die Verwendung der Definition der Krümmung aus der diskreten Differentialgeometrie [Hof08]. Hierzu kann man den 8-verbundenen digitalen Pfad aus Definition 4.2.1 (a) als diskrete Kurve γ_d im \mathbb{R}^2 auffassen.

Definition 4.2.2. (*Diskrete Kurve*) Sei $I \in \mathbb{Z}$ die Schnittmenge von \mathbb{Z} mit einem Intervall in \mathbb{R} , dann heißt $\gamma_d : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diskrete Kurve.

Der Schmiegekreis an einen Punkt $\gamma_d(k)$ wird als derjenige eindeutige Kreis definiert, der durch die drei Punkte $\gamma_d(k-1)$, $\gamma_d(k)$ und $\gamma_d(k+1)$ verläuft (Abbildung 4.2). Die Krümmung ist dann die Inverse des Radius dieses Schmiegekrees. Bei einem 8-verbundenen digitalen Pfad gibt es allerdings, bis auf euklidische Transformationen, nur vier verschiedene Anordnungen drei aufeinanderfolgender Punkte (Abbildung 4.3). Folglich gibt es bis auf das Vorzeichen auch nur vier verschiedene Werte für die Krümmung. Als Schätzer der echten Krümmung der zugrundeliegenden kontinuierlichen Kurve ist diese Definition, sowie alle Definitionen, die nur drei Punkte verwenden, nicht geeignet. Wir müssen also einen weniger lokalen Krümmungsschätzer finden, bei dem der Diskretisierungsfehler nicht so stark ins Gewicht fällt.

Worring und Smeulders veröffentlichten 1993 eine Zusammenfassung der bis dahin gefundenen Methoden [WS93]. Sie unterscheiden darin zwischen drei verschiedenen Arten von Verfahren, die auf den äquivalenten Definitionen der Krümmung basieren (siehe Satz 2.2.4):

4 Schätzung des Krümmungsprofils

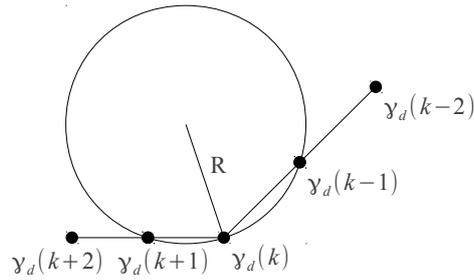


Abbildung 4.2: Schmiegekreis einer diskreten Kurve



Abbildung 4.3: Möglichkeiten der Anordnung drei aufeinanderfolgender Punkte eines 8-verbundenen diskreten Pfades

1. Definition der Krümmung über die zweite Ableitung
2. Definition der Krümmung über den Schmiegekreis
3. Richtungsbasierte Definition der Krümmung

Die beste darin vorgestellte Methode beruht auf der richtungsbasierten Definition:

Definition 4.2.3. (Krümmungsschätzer nach Worring [WS93])

Sei

$$G_\sigma(i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-i^2}{2\sigma}\right) \right) & \text{für } i = -\lceil 3\sigma \rceil, \dots, \lceil 3\sigma \rceil \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der abgeschnittene Gaußfilter und $G'_\sigma(i)$ dessen Ableitung bezüglich i . Außerdem sei

$$\hat{\theta}(k) := \begin{cases} \gamma_d(k+1) - \gamma_d(k) & \text{für } i = 1, \dots, n-1 \\ \gamma_d(1) - \gamma_d(n) & \text{für } i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $(f * g)(i) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(i-k)$ die diskrete Faltung. Dann definieren wir den Krümmungsschätzer:

$$\kappa_{DIR} := \frac{(\hat{\theta} * G'_\sigma)(i)}{1.107} \quad (4.1)$$

4 Schätzung des Krümmungsprofils

Der Korrekturfaktor 1.107 ist der durchschnittliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Pixel in einem zufälligen 8-verbundenen Pfad [DS86]. Die Ergebnisse dieses Krümmungsschätzers sind zwar durch die Glättung mit dem Gaussfilter deutlich besser als jene, die nur auf den Nachbarknoten beruhen, jedoch sind auch diese nicht zufriedenstellend (vgl. [WS93] Kapitel 3).

Trotzdem war diese Veröffentlichung die Grundlage für viele weitere Forschungsarbeiten über Krümmungsschätzung. Beispielsweise lieferte die Verwendung von euklidischen Pfaden eine Verbesserung des Krümmungsschätzers κ_{DIR} von (4.1) [Via96],[BV99]. Ein weiterer Ansatz war eine Verbesserung der Tangentenrichtung $\hat{\theta}(k)$. So wurde diese in [MSK95] als gewichteter Median verschiedener Richtungen $\gamma_d(k+i) - \gamma_d(k)$ mit $i = \{-n, \dots, n\}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$ definiert. Dieser wurde dann mithilfe von (4.1) zur Schätzung von Krümmungen verwendet.

Eine weitere Methode zur Bestimmung von Tangenten ist das Finden von *Digitalen Geradenstücken* (*Digital Straight Segments – DSS* [DR95]) eines Randes, der wie in Definition 4.2.1 (b) definiert ist. Die Tangente wird dann als maximales digitales Geradenstück (MDSS) definiert [VLF05].

Definition 4.2.4. (*Digitales Geradenstück*) Ein digitaler Pfad G heißt 4-verbundenes digitales Geradenstück, falls es ein $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ gibt, welche zueinander prim sind sowie ein $\mu \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $(x, y) \in G$ gilt:

$$\mu \leq ax - by \leq \mu + |a| + |b|$$

Die rationale Zahl a/b wird dann Steigung von G genannt.

In [CMT01] wurde ein Krümmungsschätzer angegeben, der auf der diskreten Länge solcher MDSS basiert. Die MDSS wurden auch dafür verwendet, einen digitalen Pfad näherungsweise in stückweise Geraden zu segmentieren. Die Endpunkte dieser stückweisen Geraden können als Kontrollpunkte von Splines verwendet werden, die den digitalen Pfad annähern. Diese Splines dienen dann zur Schätzung der Krümmung [HK07].

Der Krümmungsschätzer in [BGC95] und später in [FVS09] basiert auf folgender Beziehung zwischen der Krümmung einer Kurve γ in einem Punkt $x = \gamma(t)$ und der Fläche A des Kreises um x mit Radius R , die oberhalb von γ liegt (siehe Abbildung 4.4):

$$\kappa(t) = \frac{3A}{2R} - \frac{3\pi}{2} + \mathcal{O}(R^3).$$

Diese Beziehung kann diskretisiert werden und liefert einen schnellen Krümmungsschätzer.

Ein weiterer sehr gut funktionierender Ansatz wird 2009 von *Kerautret et al.* eingeführt [KL09]. Dabei werden zu einer gegebenen zusammenhängenden Pixelmenge P alle möglichen realen Objekte X betrachtet, deren Gauß-Diskretisierung die Pixelmenge P ergibt. Unter diesen Objekten wählt man dann das *wahrscheinlichste* aus. Hierbei wird

4 Schätzung des Krümmungsprofils

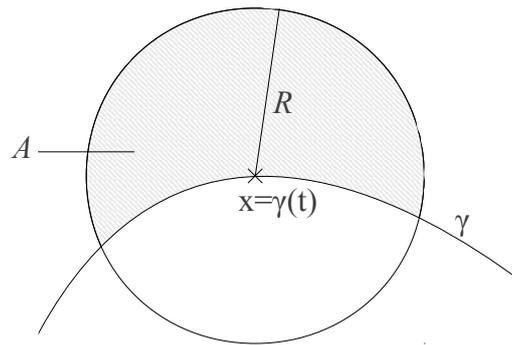


Abbildung 4.4: Beziehung zwischen $\kappa(t)$ und a

angenommen, dass das glatteste Objekt auch das wahrscheinlichste ist. Somit minimiert man das Integral über die quadrierte Krümmung entlang des Randes von X :

$$\min_X \int_{\partial X} \kappa(X, x)^2 dx \text{ unter der Nebenbedingung } D_n(X) = P.$$

In dieser Arbeit werden wir näher auf einen sehr aktuellen Krümmungsschätzer eingehen, der die Idee der *Digitalen Geradenstücke* erweitert, und darauf beruht, *Digitale Kreisbögen* einer *Digitalen Kurve* (siehe Definition 5.1.1) zu finden. Er wurde 2011 von *Roussillon et al.* veröffentlicht [RL11].

5 Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen

5.1 Maximale Digitale Kreisbögen (MDCA)

Definition 5.1.1. (*Digitale Kurve*) Sei $(v_k)_{k \in \{1, \dots, N+1\}}$ eine endliche Folge von Pixeln mit $\|v_k - v_{k+1}\| = 1$ und $v_{k+2} \neq v_k$, dann heißt die Folge von Kanten $C = (e_k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$ mit $e_k = [v_k, v_{k+1}]$ digitale Kurve mit der diskreten Länge N . Falls zusätzlich $v_1 = v_{N+1}$ und ansonsten $v_k \neq v_l$ für $k \neq l$, dann heißt C einfach geschlossen. $S(C) := \{\cup v | v \in C\} \subset \Omega$ heißt Spur von C .

Definition 5.1.2. Der diskrete Abstand zwischen zwei Kanten e_i und e_j einer digitalen Kurve $C = (e_k)_{k=1, \dots, N}$ wird folgendermaßen definiert:

$$d(e_i, e_j)_C := |j - i|$$

Falls C einfach geschlossen ist, so definieren wir

$$d(e_i, e_j)_C := \min(|j - i|, N - |j - i|)$$

Bemerkung 5.1.3. Einfach geschlossene Kurven hängen zusammen, das heißt $d(e_1, e_N) = 1$. Wir können also im Folgenden für alle $k \in \mathbb{Z}$ definieren $e_k := e_{k \bmod N}$.

Bemerkung 5.1.4. Der topologische Rand von $D_n(X)$ ist die Spur einer einfach geschlossenen digitalen Kurve $\partial D_n(X)$. Jede Kante $e_k \in \partial D_n(X)$ liegt zwischen zwei Pixeln, dem inneren Pixel $p_k^i \in D_n(X)$ und dem äußeren Pixel $p_k^o \notin D_n(X)$. Hierbei sind p_k^o und p_k^i gemäß Bemerkung 3.1.3 definiert.

Definition 5.1.5. (*Zirkulär separabel*) Zwei Punktmengen $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ und $Q = \{q_1, \dots, q_M\} \subset \mathbb{R}^2$ heißen zirkulär separabel, falls es ein $R \geq 0$ und $m \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass für alle $p \in P$ und $q \in Q$ gilt: $\|m - p\| \leq R$ und $\|m - q\| \geq R$ (oder $\|m - p\| \geq R$ und $\|m - q\| \leq R$).

Bemerkung 5.1.6. Es ist in obiger Definition ausdrücklich erlaubt, dass sowohl Punkte aus P als auch Punkte aus Q auf dem Kreis liegen können (vgl. Abbildung 5.1). Es handelt sich also nicht um eine „Separation“ im klassischen Sinne.

Definition 5.1.7. (*Digitaler Kreisbogen*) Jede Teilkurve $\partial D'_n(X) = \{e_k \in \partial D_n(X) | k = k_1, \dots, k_2\}$ für welche die äußeren Pixel $p_{k_1}^o, \dots, p_{k_2}^o$ und die inneren Pixel $p_{k_1}^i, \dots, p_{k_2}^i$ zirkulär separabel sind, heißt digitaler Kreisbogen (Digital Circular Arc - DCA). Ein digitaler Kreisbogen A heißt maximal (MDCA), falls jede Teilkurve $\partial D'_n(X)$ mit $A \subset \partial D'_n(X)$ nicht zirkulär separabel ist.

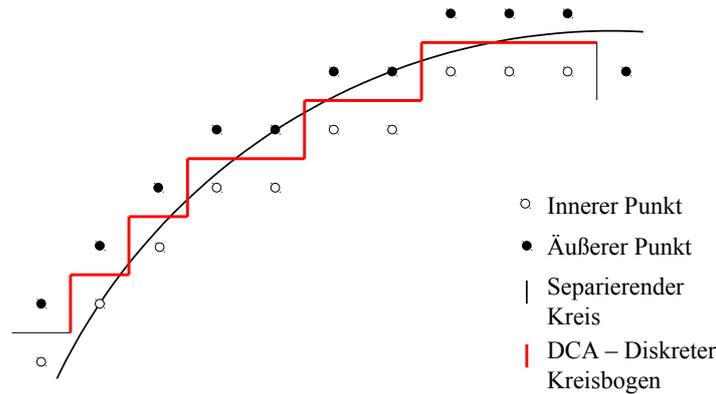


Abbildung 5.1: DCA (Digitaler Kreisbogen)

Lemma 5.1.8.

- (i) Die Menge der MDCAs einer gegebenen digitalen Kurve C ist eindeutig.
- (ii) Verschiedene MDCAs haben auch verschiedene Anfangskanten

Beweis.

- (i) offensichtlich
- (ii) Angenommen es existieren zwei verschiedene MDCAs A_1 und A_2 mit gleicher Anfangskante, dann enthält einer der beiden den anderen (o.B.d.A. $A_1 \subset A_2$). Das bedeutet aber, dass A_1 nicht maximal ist und wir haben den Widerspruch. \square

Bemerkung 5.1.9. Aus Lemma 5.1.8 folgt, dass wir die MDCAs einer digitalen Kurve nach der Reihenfolge ihrer Anfangskanten ordnen können. Wir definieren die Folge der M geordneten MDCAs mit $(A_l)_{\{l=1, \dots, M\}}$.

5.2 Berechnung von MDCAs einer digitalen Kurve

Für die Berechnung eines MDCA benötigen wir ein Verfahren, welches entscheidet, ob die beiden Punktmenge $(p_k^i)_{k=k_1, \dots, k_2}$ und $(p_k^o)_{k=k_1, \dots, k_2}$ zirkulär separabel sind und falls ja, dessen kleinsten separierenden Kreis berechnet.

Dafür seien zwei Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ und $Q = \{q_1, \dots, q_M\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Die Parameter $R \geq 0$ und $m \in \mathbb{R}^2$ eines Kreises $\mathcal{K}(R, m)$ der alle $p \in P$ aber

5 Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen

kein $q \in Q$ enthält, sind gegeben durch

$$\forall p \in P : \quad \|p - m\|^2 \leq R^2 \quad (5.1)$$

$$\forall q \in Q : \quad \|q - m\|^2 \geq R^2. \quad (5.2)$$

Das heißt P und Q sind zirkulär separabel mit dem Kreis $\mathcal{K}(R, m)$. Mit

$$\begin{aligned} u &:= m \\ v &:= \|m\|^2 - R^2 \end{aligned}$$

erhalten wir aus (5.1)-(5.2) ein lineares Gebiet bzgl. $(u, v) \in \mathbb{R}^3$:

$$\forall p \in P : \quad -2up + v + \|p\|^2 \leq 0$$

$$\forall q \in Q : \quad -2uq + v + \|q\|^2 \geq 0.$$

also mit $a_i = (-2p_i, 1)$, $b_i = -\|p\|^2$ für $i = 1, \dots, N$ und $a_i = (2q_{i-N}, -1)$, $b_i = \|q\|^2$ für $i = N + 1, \dots, N + M$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - b \leq 0, \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N+M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+M \times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N+M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+M} \quad (5.3)$$

Um jetzt den Kreis $D^*(R, m)$ mit dem kleinsten Radius $R = \sqrt{\|u\|^2 - v}$ zu bestimmen, der P von Q trennt, löst man das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{(u,v) \in \mathbb{R}^3} \|u\|^2 - v \quad \text{unter der Nebenbedingung (5.3)} \quad (5.4)$$

und setzt $R = \|u^*\|^2 - v^*$ und $m = u^*$. Für die Bestimmung eines zulässigen Punktes von (5.4) bzw. dessen Nichtexistenz muss man ein lineares Optimierungsproblem, das sogenannte Phase-1-Problem, lösen (vgl.[Ulb10]):

$$\min_{t \in \mathbb{R}, (u,v) \in \mathbb{R}^3} t \quad \text{unter der Nebenbedingung } A(u, v)^T - (t, \dots, t)^T \leq b \quad (5.5)$$

Falls die Lösung von (5.5) $t^* > 0$ ist, so besitzt (5.4) keine zulässigen Punkte und es gibt keinen Kreis, der P aber nicht Q enthält. Für $t^* \leq 0$ ist P und Q separabel.

Algorithmus 5.2.1. (Berechnung eines MDCA)

INPUT: Eine einfach geschlossene, digitale Kurve $\mathbf{C} = (e_k)_{k=1, \dots, N}$

Pixelbreite \mathbf{h}

Startkante \mathbf{k}_0

OUTPUT: Anfangsindex \mathbf{i} und Endindex \mathbf{j} des MDCA A

Radius \mathbf{R} und Mittelpunkt \mathbf{m} des kleinsten separierenden Kreises von A

0. Initialisiere $\hat{C} = (\hat{e}_k)_{k=-N+1, \dots, 2N}$ wobei $\hat{e}_k := e_{(k \bmod N)}$

p_k^i und p_k^o sind die inneren und äußeren Pixel von \hat{C}

$P^i := \{p_{k_0}^i\}$, $P^o := \{p_{k_0}^o\}$, $K = D(0, p_{k_0}^i)$, $k := k_0$

5 Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen

1. Solange $k < 2N$
 - 1.1. Setze $k := k + 1$
 - 1.2. Setze $P^i := P^i \cup p_k^i$ und $P^o := P^o \cup p_k^o$
 - 1.3. Falls der Kreis K den Punkt p_k^i nicht aber p_k^o enthält, oder p_k^o nicht aber p_k^i enthält: GOTO 1.
 - 1.4. Berechne einen zulässigen Punkt von (5.4) mithilfe von (5.5) für die Punkt-mengen P^i und P^o
Falls dieser nicht existiert: GOTO 2.
 - 1.5. Berechne den kleinsten separierenden Kreis K , der P^i und P^o trennt (siehe (5.4))
2. Setze $P^i := P^i \setminus p_k^i$, $P^o := P^o \setminus p_k^o$, $j := k - 1$, $k = k_0$
3. Solange $k > -N + 1$
 - 3.1. Setze $k := k - 1$
 - 3.2. Setze $P^i := P^i \cup p_k^i$ und $P^o := P^o \cup p_k^o$
 - 3.3. Falls der Kreis K den Punkt p_k^i nicht aber p_k^o enthält, oder p_k^o nicht aber p_k^i enthält: GOTO 3.
 - 3.4. Berechne einen zulässigen Punkt von (5.4) mithilfe von (5.5) für die Punkt-mengen P^i und P^o
Falls dieser nicht existiert: GOTO 4.
 - 3.5. Berechne den kleinsten separierenden Kreis K , der P^i und P^o trennt (siehe (5.4))
4. Setze $i := k + 1$

Algorithmus 5.2.2. (Berechnung der Menge $(A_l)_{l=1\dots M}$ von MDCAs)

INPUT: Eine einfach geschlossene, digitale Kurve $\mathbf{C} = (e_k)_{k=1,\dots,N}$
Die Pixelbreite \mathbf{h}

OUTPUT: Anfangsindex \mathbf{i}_l und Endindex \mathbf{j}_l des MDCA A_l , $l = 1, \dots, M$
Radius \mathbf{R}_l und Mittelpunkt \mathbf{m}_l des kleinsten separierenden Kreises
von A_l , $l = 1, \dots, M$

0. Initialisiere $k := 1$, $l := 1$, $\hat{C} = (\hat{e}_k)_{k=-N+1,\dots,2N}$ wobei $\hat{e}_k := e_{(k \bmod N)}$

1. Solange $k < N$
 - 1.1. Finde den längsten DCA $(\hat{e}_m)_{m=k,\dots,j}$ ausgehend von der Kante \hat{e}_k , sodass $(\hat{e}_m)_{m=k,\dots,j+1}$ kein DCA ist. (siehe Algorithmus 5.2.1, 1.-2.)

5 Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen

- 1.2. Finde den längsten DCA $A_l = (\hat{e}_m)_{m=i, \dots, j}$, sodass $(\hat{e}_m)_{m=i-1, \dots, j}$ kein DCA ist. (siehe Algorithmus 5.2.1, 3.-4.)
- 1.3. Setze R_l gleich dem Radius des kleinsten separierenden Kreises von A_l in der Einheit h , m_l gleich dessen Mittelpunkt.
- 1.4. Setze i_l auf den Anfangsindex und j_l auf den Endindex von A_l
- 1.5. Setze $k := j + 1$ und $l := l + 1$.

5.3 MDCA-Krümmungsschätzer

Definition 5.3.1. Wir betrachten einen DCA A und dessen minimalen Radius $R^h(A)$ (Radius des kleinsten separierenden Kreises mit Einheit h) und definieren die Abbildung

$$k^h(A) := 1/R^h(A).$$

Für einen DCA $A = (e_k)_{k=1, \dots, n}$ definieren wir die Abbildung

$$m(A) := e_{\lceil n/2 \rceil}.$$

Definition 5.3.2. (MDCA-Krümmungsschätzer vgl.[RL11]) Sei $(A_l)_{l=1, \dots, M}$ die Folge von MDCAs der digitalen Kurve C und $(E_l)_{l=1, \dots, M}$ eine Partition von C , sodass E_l die Menge der Pixelkanten $e \in C$ ist, für die gilt $d(e, m(A_l)) \leq d(e, m(A_k))$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$. Der MDCA-Krümmungsschätzer wird als stückweise konstante Funktion in Abhängigkeit einer digitalen Kurve C und der Kante $e \in C$ definiert:

$$\hat{\kappa}_{\text{MDCA}}^h(C, e) := k^h(A_l) \quad \text{für alle } e \in E_l$$

Algorithmus 5.3.3. (MDCA-Krümmungsschätzer)

INPUT: Eine einfach geschlossene, digitale Kurve $C = (e_k)_{k=1, \dots, N}$
Die Pixelbreite h

OUTPUT: $\hat{\kappa}_{\text{MDCA}}^h(C, e)$ für jedes $e \in C$

1. Berechne die Menge der MDCAs $(A_l)_{l=1, \dots, M}$ von C (siehe Algorithmus 5.2.2).
2. Setze R_l gleich dem Radius des kleinsten separierenden Kreises von A_l in der Einheit h .
3. Setze $M_l := \hat{e}_{\lceil (j_l - i_l)/2 \rceil}$
4. Für $k = 1, \dots, N$
 - 4.1. Finde den Index i der Kante aus M_l , $l = 1, \dots, M$, welche den kleinsten Abstand zu e_k hat.
 - 4.2. Setze $\hat{\kappa}_{\text{MDCA}}^h(C, e_k) = 1/R_i$.

5 Krümmungsschätzer basierend auf Digitalen Kreisbögen

Im Folgenden wird eine weitere Möglichkeit zur Schätzung der Krümmung mithilfe der MDCAs angegeben. Hierbei wird für eine gegebene Kante e nicht nur der nächste MDCA, sondern alle MDCAs, die e enthalten, verwendet. Die Gewichtung erfolgt wie in [LVV07], worin das Verfahren schon zur Schätzung von Tangenten verwendet wurde.

Definition 5.3.4. Sei $C = (e_k)_{k=\{1,\dots,N\}}$ eine digitale Kurve und $(A_l)_{l\in\{1,\dots,M\}}$ die Menge der MDCAs von C . e_{i_l} und e_{j_l} seien Anfangs- und Endkante des MDCA A_l und $e_k \in A_l$. Dann heißt $E_l(k) := \left| \frac{k-i_l}{j_l-i_l} \right|$ die Exzentrizität von e_k bzgl. A_l .

Bemerkung 5.3.5. Es gilt $E_l(k) \in [0, 1]$ und je näher $E_l(k)$ an $1/2$ liegt, desto zentraler liegt die Kante e_k im MDCA A_l .

Wir wollen jetzt zu einer gegebenen Kante e_k MDCAs, in denen e_k zentraler liegt, stärker gewichten als andere. Dazu betrachten wir eine Funktion $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die bei 0 und 1 den Wert 0 und bei $1/2$ ihr Maximum annimmt (z.B. $\lambda(p) := 4p(1-p)$ oder $\lambda(p) := -p \log(p) - (1-p) \log(1-p)$).

Definition 5.3.6. (λ -MDCA-Krümmungsschätzer) Sei $C = (e_k)_{k=\{1,\dots,N\}}$ eine digitale Kurve und $(A_l)_{l\in\{1,\dots,n\}}$ die Menge der MDCAs von C und $\mathcal{P}(e_k) := \{l : e_k \in A_l\}$. $k^h(A)$ ist wie in Definition 5.3.2 definiert. Dann ist

$$\hat{\kappa}_{\lambda\text{-MDCA}}^h(C, e_k) := \frac{\sum_{l \in \mathcal{P}(e_k)} \lambda(E_l(k)) k^h(A_l)}{\sum_{l \in \mathcal{P}(e_k)} \lambda(E_l(k))}$$

der λ -MDCA-Krümmungsschätzer der digitalen Kurve C .

Ein großes Interesse besteht weiterhin an der robusten Erweiterung des Algorithmus, um ihn auch an gestörten Bildern anwenden zu können. Eine erste Idee ist die Einführung eines Parameters η , der die Gleichungen (5.1)-(5.2) folgendermaßen abändert:

$$\begin{aligned} \forall p \in P : \quad & \|p - m\|^2 \leq (R + \eta)^2 \\ \forall q \in Q : \quad & \|q - m\|^2 \geq (R - \eta)^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist also die Anzahl der Punktmengen die als zirkulär separabel betrachtet wird, größer als für $\eta = 0$. Je größer die Störung der Bilder ist, desto größer müsste man η wählen. Das Problem ist allerdings, dass die Definitionen in Kapitel 5.1 von inneren und äußeren Punkten bei gestörten digitalen Kurven nicht mehr eindeutig sind.

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir zuerst den Begriff der Mehrgitterkonvergenz. Diese trifft eine Aussage darüber wie sich der Fehler eines diskreten, geometrischen Schätzers verhält, wenn die Pixelbreite h gegen 0 geht. Ein diskreter, geometrischer Schätzer kann sowohl eine globale Größe – wie die Länge einer Kurve oder die Fläche einer Menge – als auch eine lokale Größe – wie die Tangentenrichtung oder die Krümmung einer Kurve – schätzen. Es ist bisher noch nicht gelungen, die Mehrgitterkonvergenz für einen Krümmungsschätzer nachzuweisen [CLR12]. In [RL11] konnte sie nur unter gewissen Voraussetzungen gezeigt werden. Ziel dieses Kapitels ist der Beweis der gleichmäßigen Mehrgitterkonvergenz für den MDCA-Krümmungsschätzer ohne diese Voraussetzungen.

6.1 Mehrgitterkonvergenz

Im Folgenden wird die Mehrgitterkonvergenz für lokale, diskrete, geometrische Schätzer angegeben.

Sei \mathbb{X} eine Familie von kompakten, einfach zusammenhängenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 und sei $\partial D_h(X)$ eine digitale Kurve (vgl. Bemerkung 5.1.4 und Definition 3.2.3 mit $n = 1/h$). Ein lokaler, diskreter, geometrischer Schätzer $\hat{E} = (\hat{E}^h)_{h>0}$ einer lokalen, geometrischen Eigenschaft $E(X, x)$ der Menge X im Punkt $x \in \partial X$ ist eine Familie von Abbildungen, die einer digitalen Kurve und einer Kante auf dieser Kurve einen reellen Wert zuordnen.

Definition 6.1.1. *Der lokale, diskrete geometrische Schätzer \hat{E} heißt mehrgitterkonvergent für eine Familie \mathbb{X} , falls für alle $X \in \mathbb{X}$, $h > 0$ und $x \in \partial X$ gilt:*

$$\forall e \in \partial D_h(X), \forall y \in e \text{ mit } \|x - y\|_1 \leq h \exists \tau_x(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(h) = 0 : \\ |\hat{E}^h(\partial D_h(X), e) - E(X, x)| \leq \tau_x(h).$$

\hat{E} ist sogar gleichmäßig mehrgitterkonvergent, falls eine Funktion $\tau(h) \geq \tau_x(h)$ existiert, die unabhängig von x ist; $\tau(h)$ heißt dann Konvergenzgeschwindigkeit.

Im Folgenden betrachten wir den Krümmungsschätzer $\hat{E} := \hat{\kappa}_{\text{MDCA}}$ und für $X \in \mathbb{X}$ fordern wir zusätzlich, dass die Abbildung $\partial X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \kappa(X, x)$ stetig ist.

6.2 Beweis der Mehrgitterkonvergenz des MDCA-Krümmungsschätzers

Für den Beweis der Mehrgitterkonvergenz benötigen wir zunächst den Begriff der Trägerfunktion. Eine konvexe Kurve kann durch diese Funktion eindeutig charakterisiert werden.

Definition 6.2.1. (Trägerfunktion)

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine konvexe Kurve und $n(\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$, $t(\phi) := \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$.

Dann wird durch

$$f_\gamma^M(\phi) : [\phi_1, \phi_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_\gamma^M(\phi) := \max \{ \langle \gamma(t) - M, n(\phi) \rangle : t \in [a, b] \}$$

die sogenannte Trägerfunktion von γ zum Zentrum M definiert. Hierbei ist ϕ_1 bzw. ϕ_2 der Winkel zwischen $\gamma(a) - M$ bzw. $\gamma(b) - M$ mit der x -Achse.

Im Folgenden bezeichnen wir $f_\gamma^{M'}(\phi) := \frac{d}{d\phi} f_\gamma^M(\phi)$.

Lemma 6.2.2. Sei $\bar{x} \in S(\gamma)$ mit der Normalen $n(\phi)$, dann gilt:

$$\frac{1}{\kappa(\bar{x})} = f_\gamma^M(\phi) + f_\gamma^{M''}(\phi)$$

Beweis. [Fla68] Es sei $\bar{x}(\phi) \in S(\gamma)$ so gewählt, dass $\forall x \in S(\gamma)$

$$\langle \bar{x}(\phi) - M, n(\phi) \rangle \geq \langle x - M, n(\phi) \rangle$$

Dann hat \bar{x} die Normale $n(\phi)$ und mit $\bar{x}'(\phi) := \frac{d\bar{x}}{d\phi}$ gilt wegen $\bar{x}'(\phi) \perp n(\phi)$:

$$\begin{aligned} f_\gamma^{M'}(\phi) &= \langle \bar{x}(\phi) - M, t(\phi) \rangle + \langle \bar{x}'(\phi), n(\phi) \rangle \\ &= \langle \bar{x}(\phi) - M, t(\phi) \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_\gamma^{M''}(\phi) &= -\langle \bar{x}(\phi) - M, n(\phi) \rangle + \langle \bar{x}'(\phi), t(\phi) \rangle = -f_\gamma^M(\phi) + \left\langle \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\phi}, t(\phi) \right\rangle \\ &= -f_\gamma^M(\phi) + \frac{ds}{d\phi} \langle t(\phi), t(\phi) \rangle = -f_\gamma^M(\phi) + \frac{ds}{d\phi} = -f_\gamma^M(\phi) + \frac{1}{\kappa(\bar{x}(\phi))} \quad \square \end{aligned}$$

Definition 6.2.3. Für $M \in \mathbb{R}^2$, $R, d \in \mathbb{R}$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ wird der $(M, R, d, \theta_1, \theta_2)$ -Ring definiert als $\mathcal{R} := \{M + (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid R - d \leq r \leq R + d, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} \subset \mathbb{R}^2$. So ein Ring ist eine einfache Überdeckung einer konvexen Kurve γ , falls die Schnittmenge $\{M + r(\cos \theta, \sin \theta) \mid r > 0\} \cap S(\gamma)$ für alle $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ genau aus einem Punkt $x(\theta) \in \mathcal{R}$ besteht.

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

Der Beweis zu folgendem Lemma verfolgt eine ähnliche Strategie wie der Beweis zu Lemma 1 in [RL11]. Er wurde jedoch erweitert und kommt dadurch ohne die störenden Voraussetzungen aus.

Lemma 6.2.4. *Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine konvexe Kurve mit positiver Krümmung und \mathcal{R} ein $(M, R, d, \theta_1, \theta_2)$ -Ring der Länge $L = (\theta_2 - \theta_1)R$, der γ einfach überdeckt. Zusätzlich sei $R \geq R_{min} > 0$ für alle $d > 0$.*

Dann gilt für alle $x \in \mathcal{R} \cap S(\gamma)$:

$$|R - 1/\kappa(x)| \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) \text{ für } d \rightarrow 0$$

Beweis. Sei \mathcal{R} so ein Ring. Wir definieren $x(\theta) = \{M + r(\cos \theta, \sin \theta) | r > 0\} \cap S(\gamma)$. Für $i = 1, 2$ besitze $x(\theta_i)$ die Normale $n(\phi_i)$ und $S(\gamma) \cap \mathcal{R}$ wird durch die Trägerfunktion $f := f_\gamma^M : [\phi_1, \phi_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig repräsentiert (siehe Abbildung 6.1).

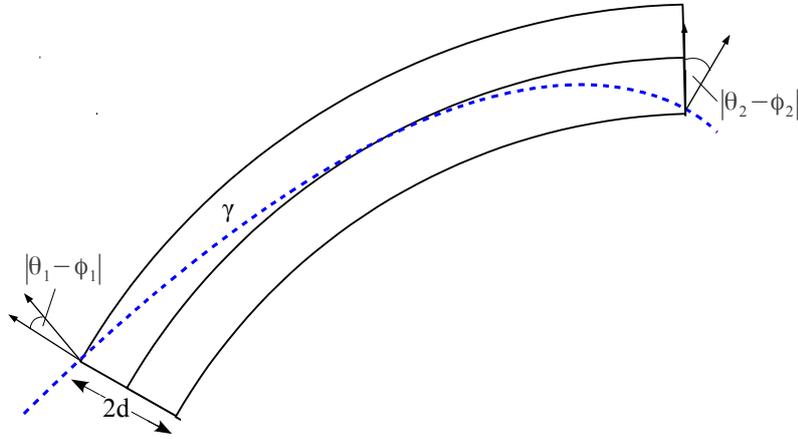


Abbildung 6.1: Veranschaulichung des Beweises von Lemma 6.2.4

1. Beschränkung von $(\phi_2 - \phi_1)$:

Sei L_γ die Länge von γ zwischen $x(\theta_1)$ und $x(\theta_2)$, dann gilt wegen der Konvexität von γ :

$$\begin{aligned} (R-d)(\theta_2 - \theta_1) &\leq L_\gamma \leq (R+d)(\theta_2 - \theta_1) + 4d \\ \Leftrightarrow L(R-d)/R &\leq L_\gamma \leq L(R+d)/R + 4d \end{aligned}$$

Nach Satz 2.2.9 gilt $L_\gamma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{\kappa} d\phi$ und mit κ_{min} bzw. κ_{max} als minimale bzw. maximale Krümmung von $S(\gamma) \cap \mathcal{R}$ folgt:

$$\kappa_{min}L(R-d)/R \leq \phi_2 - \phi_1 \leq \kappa_{max}(L(R+d)/R + 4d) \quad (6.1)$$

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

2. Beschränkung von $f(\phi)$:

Für jedes $x(\theta) \in S(\gamma) \cap \mathcal{R}$ mit Normale $n(\phi)$ gilt $f(\phi) = \cos(|\phi - \theta|) \|x - M\|$. Also:

$$(R - d) \cos(|\phi - \theta|) \leq f(\phi) \leq (R + d) \quad (6.2)$$

Man erhält den maximal möglichen Winkel $|\phi - \theta|_{max}$, falls die Kurve γ die maximal mögliche Krümmung κ_{max} konstant beibehält und gerade noch in \mathcal{R} bleibt (Siehe Abbildung 6.2).

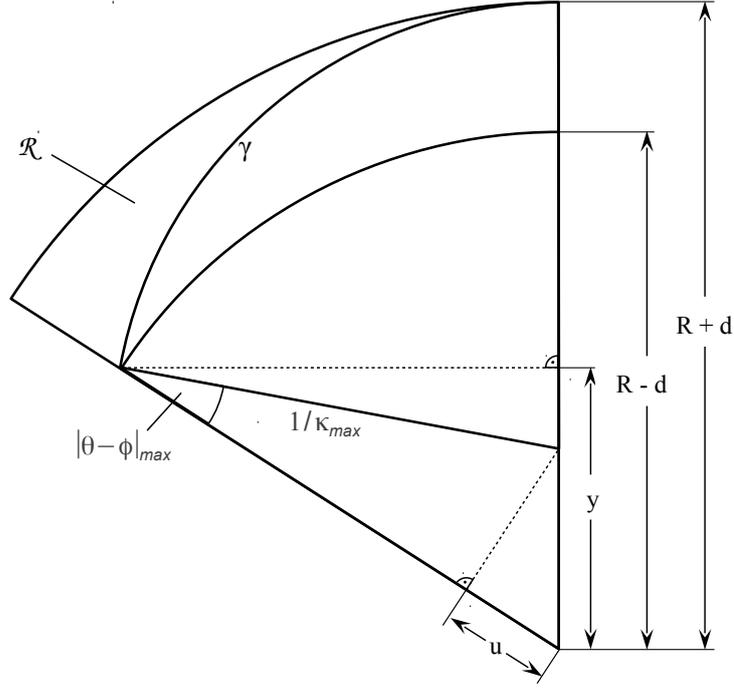


Abbildung 6.2: Hilfszeichnung 1

Es gilt

$$\cos(|\phi - \theta|_{max}) = (R - d - u) \kappa_{max} \quad \text{und} \quad \frac{u}{R + d - 1/\kappa_{max}} = \frac{y}{R - d}$$

und mit

$$(R - d)^2 - y^2 = 1/\kappa_{max}^2 - (y - (R + d - 1/\kappa_{max}))^2$$

folgt

$$\cos(|\phi - \theta|_{max}) = 1 - 2Rd\kappa_{max}/(R + d)$$

Eingesetzt in (6.2):

$$(R - d)(1 - 2Rd\kappa_{max}/(R + d)) \leq f(\phi) \leq (R + d) \quad (6.3)$$

3. Wir zeigen:

$$L \in \mathcal{O}(d^{\frac{1}{l}}) \tag{6.4}$$

$$\text{falls } \kappa^{(k)}(0) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, l-3 \text{ und } \kappa^{(l-2)}(0) \neq 0, \quad l \geq 3 \tag{6.5}$$

Das heißt $l-2$ ist die erste Ordnung, für welche die Ableitungen der Krümmung κ nicht verschwinden. Hierbei ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, sodass $\gamma(0) \in \mathcal{R}$ für alle $d > 0$. O.B.d.A. sei $\kappa^{(l-2)}(0) > 0$. Zunächst formulieren wir die Krümmung in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (r(s) \cos \theta(s), r(s) \sin \theta(s)) \\ \gamma'(s) &= (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta, r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta) \\ \gamma''(s) &= \begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ 2r'\theta' + r\theta'' \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} -2r'\theta' - r\theta'' \\ r'' - r\theta'^2 \end{pmatrix} \sin \theta \\ \Rightarrow \quad \kappa(s) &= \langle \gamma''(s), N(\theta) \rangle = r(s)\theta'(s)^2 - r''(s) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Wir nehmen jetzt an, dass $\mathcal{K}(R, M)$ die Kurve γ in einem Punkt $x = \gamma(0)$ optimal annähert (das heißt $r(0) = R$, $r'(0) = 0$ und $\kappa(0) = 1/R$). Dies ist der Worst-Case-Fall für die Abschätzung (6.5). Wir können jetzt eine Beziehung zwischen d und L aufstellen:

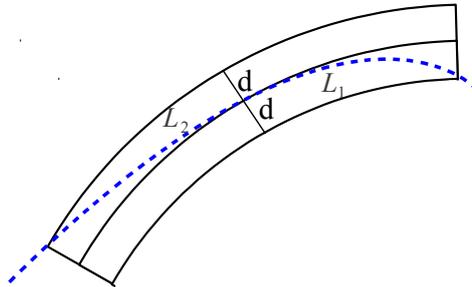


Abbildung 6.3: Hilfszeichnung 2

$$r(L_1) = R - d(L_1) \text{ und } r(-L_2) = R + d(-L_2)$$

Hierbei ist $L = L_1 + L_2$ und $r(0) = R$, $r'(0) = 0$. Die Ordnungen von $d(L_1)$ und $d(L_2)$ sind bzgl. L identisch, wir betrachten also nur

$$r(L) = R - d(L) \quad \Leftrightarrow \quad d(L) = R - r(L)$$

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

Um (6.6) zu verwenden, benötigen wir zunächst die Ableitungen von $\theta(s)$ an der Stelle $s = 0$. Wegen $r'(0) = 0$ gilt $\theta(0) = \phi(0)$ und wegen $\kappa^{(l-2)}(0) > 0$ gilt $\phi(s) - \theta(s) \geq 0$ in einer Umgebung von $s = 0$.

$$\theta'(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) = \left(\frac{d\theta}{ds_\theta} \frac{ds_\theta}{ds} \right) (s) = \frac{1}{R} \cdot \cos(\phi(s) - \theta(s)) \quad \Rightarrow \theta'(0) = \frac{1}{R} \quad (6.7)$$

$$\theta''(s) = -\frac{1}{R} \cdot \sin(\phi(s) - \theta(s))(\phi'(s) - \theta'(s)) \quad \Rightarrow \theta''(0) = 0 \quad (6.8)$$

Hierbei ist $n(\phi)$ die Normale von $x(\theta)$.

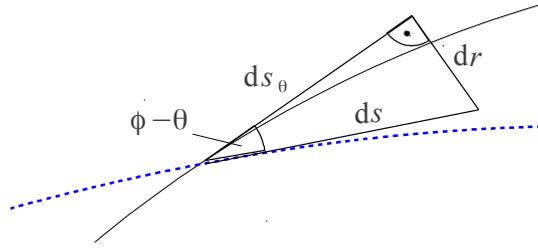


Abbildung 6.4: Hilfszeichnung 3

Man kann mit vollständiger Induktion über n für $n \geq 2$ mit Induktionsanfang (6.8) zeigen:

$$\begin{aligned} R \cdot \theta^{(n)}(s) &= \cos(\phi(s) - \theta(s)) \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ m \text{ gerade}}} \prod_{\substack{1 \leq i_k \leq n-2 \\ \sum_{k=1}^m i_k = n-1}} c_{i_k}(\phi^{(i_k)}(s) - \theta^{(i_k)}(s)) \\ &+ \sin(\phi(s) - \theta(s)) \sum_{\substack{1 \leq m \leq n-1 \\ m \text{ ungerade}}} \prod_{\substack{1 \leq i_k \leq n-1 \\ \sum_{k=1}^m i_k = n-1}} d_{i_k}(\phi^{(i_k)}(s) - \theta^{(i_k)}(s)) \end{aligned}$$

und mit der Voraussetzung (6.5) und $\phi^{(l)}(s) = \kappa^{(l-1)}(s)$ folgt:

$$\theta^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für } 3 \leq n \leq l-1 \quad (6.9)$$

$$(6.10)$$

Wir können jetzt die Ableitungen von $d(L)$ im Punkt $L = 0$ berechnen:

$$d(0) = R - R = 0$$

$$d'(0) = -r'(0) = 0$$

$$d''(0) = -r''(0) = \kappa(0) - \theta'^2(0)r(0) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}R = 0$$

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt wegen (6.7). Für höhere Ableitung zeigt man wieder mit vollständiger Induktion über n für $n \geq 2$ mit Induktionsanfang $d''(s) = \kappa(s) - \theta'^2(s)r(s)$:

$$d^{(n)}(s) = \kappa^{(n-2)}(s) - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j=n}} c_{ij} \theta^{(i)}(s) \theta^{(j)}(s) r(s) \text{ für } c_{ij} \in \mathbb{R}$$

Hieraus folgt mit (6.5) und (6.9):

$$d^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für } 3 \leq n \leq l-1 \quad (6.11)$$

$$d^{(l)}(0) = \kappa^{(l-2)}(0) > 0 \quad (6.12)$$

Das heißt, die Taylorentwicklung von $d(L)$ im Punkt $L = 0$ lautet

$$d(L) = \frac{1}{l!} L^l \kappa^{(l-2)}(0) + \Omega(L^{l+1}) = \Omega(L^l),$$

woraus die Behauptung folgt.

4. Beschränkung von $|f''|$.

Mit vollständiger Induktion über n und Induktionsanfang $f^{(3)} = (1/\kappa)' - f' = \kappa'/\kappa^2 - f'$ (vgl. Lemma 6.2.2) zeigt man für $n \geq 3$:

$$f^{(n)} = \left(\sum_{1 \leq m \leq n-2} \kappa^{-(m+1)} \prod_{\substack{1 \leq i_k \leq n-2 \\ \sum_{k=1}^m i_k = n-2}} c_{i_k m} \kappa^{(i_k)} \right) - f^{(n-2)}, \quad c_{i_k m} \in \mathbb{R}$$

Es folgt mit Voraussetzung (6.5):

$$f^{(k)} = -f^{(k-2)} \quad \text{für alle } 3 \leq k \leq l-1 \quad (6.13)$$

$$\Rightarrow f^{(k)} = \pm f'' \quad \text{für alle geraden } k \leq l-1 \quad (6.14)$$

Die Taylorentwicklungen am Punkt $\bar{\phi} := (\phi_1 + \phi_2)/2$ ergeben:

$$f(\phi_1) + f(\phi_2) = 2f(\bar{\phi}) + \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{4} f''(\bar{\phi}) + \sum_{\substack{n=4 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(\phi_2 - \phi_1)^n}{2^{n-1} n!} f^{(n)}(\bar{\phi})$$

dies wird mit (6.14) zu

$$\begin{aligned} f(\phi_1) + f(\phi_2) &= 2f(\bar{\phi}) + \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{4} f''(\bar{\phi}) \\ &\pm \sum_{\substack{n=4 \\ n \text{ gerade}}}^{l-1} \frac{(\phi_2 - \phi_1)^n}{2^{n-1} n!} f''(\bar{\phi}) + \sum_{\substack{n=l \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(\phi_2 - \phi_1)^n}{2^{n-1} n!} f^{(n)}(\bar{\phi}), \end{aligned}$$

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

woraus folgt:

$$f''(\bar{\phi}) = \frac{4(f(\phi_1) - 2f(\bar{\phi}) + f(\phi_2))}{(\phi_2 - \phi_1)^2 \pm \frac{(\phi_2 - \phi_1)^4}{48} \pm \dots} + \mathcal{O}((\phi_2 - \phi_1)^{l-2}) \quad (6.15)$$

(6.1) und (6.3) eingesetzt in (6.15) ergibt:

$$|f''(\bar{\phi})| \leq 16 R^2 \left(\frac{R + d + (R - d) R \kappa_{max}}{\kappa_{min}^2 (R - d)^2 (R + d)} \right) \frac{d}{L^2 + \mathcal{O}(L^4)} + \mathcal{O}(L^{l-2}) \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) + \mathcal{O}(L^{l-2}),$$

woraus mit $L \in \mathcal{O}(d^{\frac{1}{l}})$ und $R \geq R_{min} > 0$ folgt:

$$|f''(\bar{\phi})| \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) + \mathcal{O}(L^{l-2}) = \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{L^l}{d}\right)\right) \quad (6.16)$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) (1 + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) \quad (6.17)$$

5. Zuletzt verwenden wir Lemma 6.2.2. Sei $\bar{x} \in S(\gamma) \cap \mathcal{R}$ mit der Normalen $n(\bar{\phi})$, dann gilt

$$\begin{aligned} 1/\kappa(\bar{x}) &= f(\bar{\phi}) + f''(\bar{\phi}) \leq R + d + \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) \\ \Rightarrow |1/\kappa(\bar{x}) - R| &\in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) \end{aligned}$$

Wegen (6.5) gilt $L \rightarrow 0$ und für alle $x \in S(\gamma) \cap \mathcal{R}$ folgt $x \rightarrow \bar{x}$, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir zeigen jetzt mithilfe von Lemma 6.2.4, dass die Länge L des Rings \mathcal{R} nicht zu schnell gegen 0 konvergiert, falls die Dicke $d \rightarrow 0$. Damit können wir dann die Konvergenz des Verfahrens nachweisen.

Lemma 6.2.5. *Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 6.2.4, dann gilt:*

$$L \in \Omega(d^{\frac{1}{3}})$$

Beweis.

1. Wir zeigen zunächst, dass es für alle $d > 0$ ein $x(\theta_0) \in \mathcal{R} \cap S(\gamma)$ mit Normalen $n(\phi_0)$ gibt, sodass $\sin(|\theta_0 - \phi_0|) \in \mathcal{O}(d/L)$ ist. In Abbildung 6.4 erkennt man

$$\sin(|\theta - \phi|) = \frac{dr}{ds_\phi},$$

woraus folgt

$$\frac{L(R - d)}{R} \sin(|\phi - \theta|_{min}) \leq \sin(|\phi - \theta|_{min}) L_\gamma \leq \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin(|\phi - \theta|) ds_\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} dr \leq 2d,$$

also

$$\sin(|\phi - \theta|_{min}) \leq \frac{2dR}{L(R-d)} \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L}\right). \quad (6.18)$$

2. Sei γ nach Bogenlänge parametrisiert, sodass $x(\theta_0) = \gamma(0)$. O.B.d.A sei $r'(0) \leq 0$. Dann ist $\sin(|\theta - \phi|_{min}) = -r'(0)$ (vgl. Abbildung 6.4). Aus dem Beweis von Lemma 6.2.4 wissen wir

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \theta'^2(s)r(s) - r''(s) \\ d(L) &= R - r(L). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} d(0) &= R - R + \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d) \\ d'(0) &= -r'(0) = \sin(|\theta - \phi|_{min}) \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L}\right) \end{aligned}$$

und

$$d''(0) = \kappa(0) - \theta'^2(0)r(0) = \kappa(0) - \frac{1}{R^2}(R - \mathcal{O}(d)) \in \kappa(0) - \frac{1}{R} + \mathcal{O}(d).$$

Dies wird mit Lemma 6.2.4 zu

$$d''(0) \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) + \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right).$$

Die Taylorentwicklung ergibt also

$$d(L) \in \mathcal{O}(d) + L\mathcal{O}\left(\frac{d}{L}\right) + L^2\mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) + \mathcal{O}(L^3),$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Satz 6.2.6. *Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 6.2.5 gilt für alle $x \in \mathcal{R} \cap S(\gamma)$*

$$\left| R - \frac{1}{\kappa(x)} \right| \in \mathcal{O}(d^{\frac{1}{3}})$$

Beweis. Wenn man das Ergebnis von Lemma 6.2.5 in das von Lemma 6.2.4 einsetzt, ergibt sich

$$\left| R - \frac{1}{\kappa(x)} \right| \in \mathcal{O}\left(\frac{d}{L^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{d}{d^{2/3}}\right) = \mathcal{O}(d^{\frac{1}{3}}). \quad \square$$

Satz 6.2.7. *Sei \mathbb{X} die nichtleere Familie von konvexen, kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^2 . Für alle $X \in \mathbb{X}$ sei die Krümmung entlang von ∂X stetig, streng positiv und nach oben beschränkt. Dann ist der Krümmungsschätzer $\hat{\kappa}_{MDCA}$ (siehe Definition 5.3.2) gleichmäßig mehrgitterkonvergent mit $\tau(h) \in \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ für \mathbb{X} .*

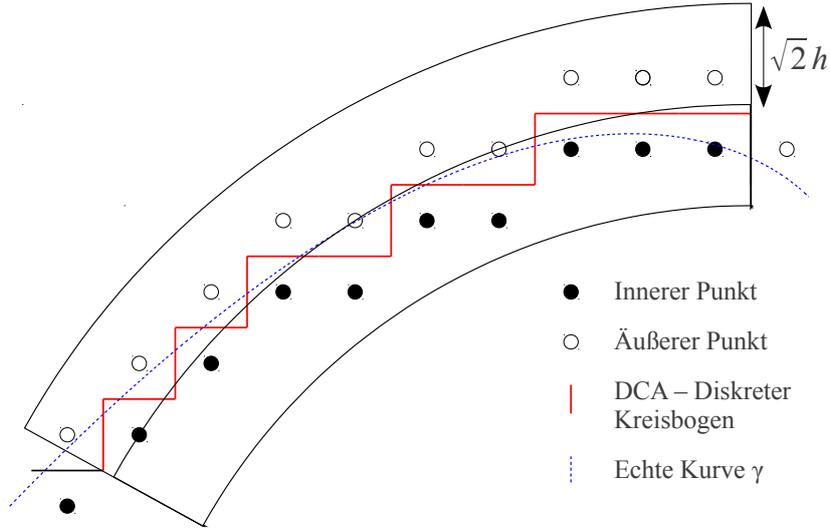


Abbildung 6.5: Veranschaulichung des Beweises von Satz 6.2.7

Beweis. [RL11] Sei $X \in \mathbb{X}$, $h > 0$, $x \in \partial X$, $e \in \partial D_h(X)$ und $y \in e$ mit $\|x - y\|_1 < h$ gegeben. Sei $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Menge der MDCAs von $\partial D_h(X)$. Dann ist y näher an einer Kante $m(A_i)$ als an jeder anderen. $\mathcal{K}(R, m)$ sei der kleinste Kreis, der die inneren und äußeren Pixel (p^i und p^o) von A_i separiert. θ_1 und θ_2 sind die Polarwinkel der ersten und letzten Kante von A_i bezüglich dem Mittelpunkt m und \mathcal{R} sei der $(m, R, \sqrt{2}h, \theta_1, \theta_2)$ -Ring. Da $\mathcal{K}(R, m)$ p^i von p^o separiert und wir die Dicke $d = \sqrt{2}h$ gewählt haben, liegen alle diese Pixel in \mathcal{R} . Außerdem liegt auch ∂X zwischen p^i und p^o und folglich in \mathcal{R} . In [GL95] sieht man, dass für ein klein genuges $h > 0$ die Topologien von $\partial D_h(X)$ und ∂X und somit auch von $\mathcal{R} \cap \partial D_h(X)$ und $\mathcal{R} \cap \partial X$ übereinstimmen. Daraus folgt, dass \mathcal{R} jede Kurve mit Spur ∂X einfach überdeckt. Außerdem liegen x und y in \mathcal{R} . Es sind alle Voraussetzungen von Satz 6.2.6 erfüllt und wir können folgern, dass für jedes $x \in \mathcal{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\kappa(X, x) - \hat{\kappa}^h(\partial D_h(X), e)| &= |\kappa(X, x) - 1/R| = |R - 1/\kappa(x)| \cdot |\kappa(x)/R| \\ &\in \mathcal{O}(d^{\frac{1}{3}}) = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}}). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 6.2.8. Sei \mathbb{X} die nichtleere Familie von kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^2 . Für alle $X \in \mathbb{X}$ sei die Krümmung entlang von ∂X nach oben beschränkt. Dann gilt für alle $x_0 \in \partial X$ mit $\kappa(X, x_0) \neq 0$ und $x \mapsto \kappa(X, x)$ stetig in x_0 :

$$\forall e \in \partial D_h(X), \forall y \in e \text{ mit } \|x_0 - y\|_1 \leq h: \quad |\hat{\kappa}^h(\partial D_h(X), e) - \kappa(X, x_0)| \in \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}}).$$

Beweis. Es sei $X \in \mathbb{X}$ und ein $x_0 \in \partial X$ gegeben das obige Voraussetzungen erfüllt. Für ein $h > 0$ sei außerdem ein $e \in D_h(X)$ und $y \in e$ mit $\|x_0 - y\|_1 < h$ gegeben.

6 Fehlerabschätzung des MDCA-Krümmungsschätzers

Wie im Beweis von Satz 6.2.7 definieren wir dann den $(m, R, \sqrt{2}h, \theta_1, \theta_2)$ -Ring \mathcal{R}^h in Abhängigkeit von h . Da $\kappa(X, x_0) \neq 0$ und die Abbildung $x \mapsto \kappa(X, x)$ stetig in x_0 ist, gibt es eine Umgebung U von x_0 , sodass $U \cap \partial X$ die Spur einer konvexen Kurve mit streng positiver oder streng negativer Krümmung ist. O.B.d.A. sei die Krümmung positiv. Wegen Punkt 3 des Beweises von Lemma 6.2.4 wissen wir außerdem, dass die Länge des maximalen digitalen Kreisbogens für $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht. Folglich gibt es ein $h_0 > 0$ sodass für alle $h \leq h_0$ die Schnittmenge $\mathcal{R}^h \cap \partial X$ die Spur einer konvexen Kurve mit positiver Krümmung ist. Daraus folgern wir analog zum Beweis von Satz 6.2.7 die Behauptung. \square

7 Experimentelle Ergebnisse

Im folgenden Kapitel testen wir den Krümmungsschätzer an verschiedenen Objekten, von denen wir das exakte Krümmungsprofil kennen.

7.1 Beispielobjekte

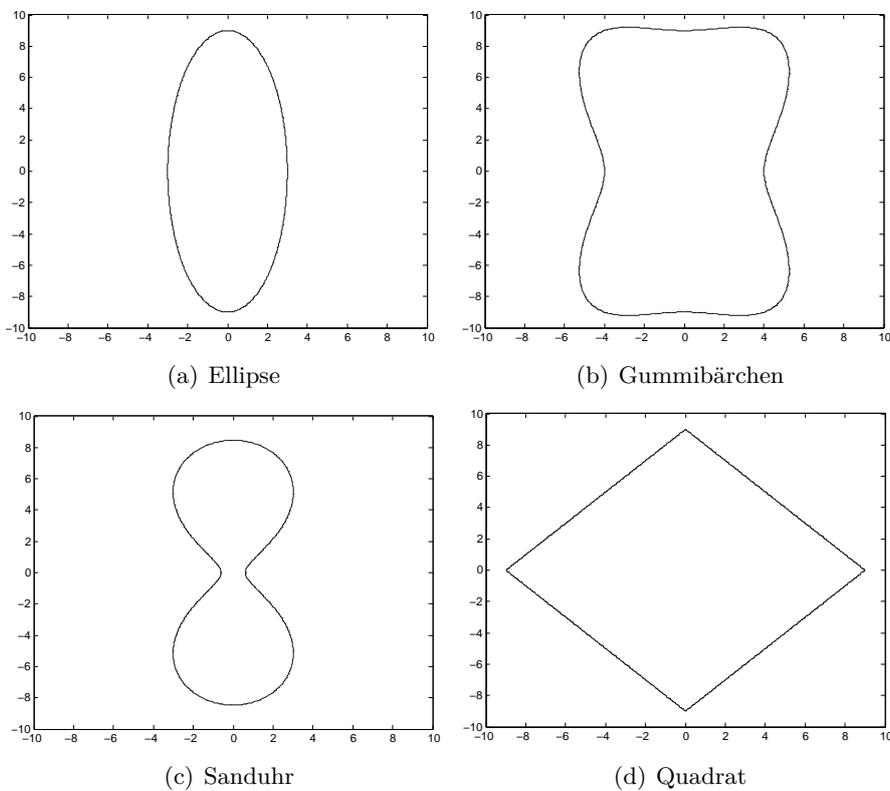


Abbildung 7.1: Beispielobjekte

Das erste Objekt in Abbildung 7.1 (a) ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 9$ und $b = 3$. Diese wird durch folgende Gleichung beschrieben:

Definition 7.1.1. (*Ellipse*) Die Menge

$$E := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

heißt *Ellipse*.

Das zweite Objekt (Abbildung 7.1 (b)) nennen wir Gummibärchen und wird durch die Menge

$$G := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} - x^2 - y^2 = 1 \right\}$$

beschrieben, wobei das dritte Objekt in Abbildung 7.1 (c) Sanduhr genannt wird und beschrieben wird durch

$$S := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \left(3.96 + \left(\frac{x}{3} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right)^2 - 15.84 \cdot \left(\frac{x}{3} \right)^2 = 16 \right\}.$$

Das exakte Krümmungsprofil entlang der Kurve γ_X mit der Spur $S(\gamma_X) = X$ für die einzelnen Objekte $X \in \{E, G, S\}$ lässt sich mithilfe von Lemma 2.2.6 bestimmen. Zum Beispiel gilt für die Ellipse $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ und für die Krümmung im Punkt $(x, y)^T = \gamma_E(s)$ gilt folglich

$$\kappa = \frac{g_{xx}g_y - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x}{(g_x^2 + g_y^2)^{3/2}} = \frac{4x + 4y}{a^2b^2 \left((2x/a^2)^2 + (2y/b^2)^2 \right)^{3/2}}.$$

Ebenso lässt sich die Krümmung mithilfe von Lemma 2.2.6 auch für die beiden anderen Objekte berechnen. Das Quadrat betrachten wir separat in Abschnitt 7.4.

7.2 Experimenteller Fehler

Im Folgenden werden wir die Objekte mithilfe der Gauß-Diskretisierung von Definition 3.2.3 diskretisieren. Hierfür verwenden wir die Pixelbreiten $h = 2^{-n}$, wobei $n \in \{0, \dots, 6\}$. Anschließend berechnen wir den MDCA-Krümmungsschätzer und den λ -MDCA-Krümmungsschätzer dieser digitalen Objekte und vergleichen den Wert mit der exakten Krümmung. Um den Fehler in der Pixelkante e mit der exakten Krümmung zu vergleichen, betrachten wir den Punkt $p' = (x', y') \in \partial X$, der minimalen Abstand zum Mittelpunkt von e besitzt. Der absolute Fehler in der Pixelkante e mit Pixelbreite h ist dann

$$\epsilon_{\text{abs}}^h(e) := |\kappa(X, p') - \hat{\kappa}_{\text{MDCA}}^h(\partial D_h(X), e)|$$

7 Experimentelle Ergebnisse

und den durchschnittlichen Fehler definieren wir als

$$\epsilon_{\text{av}}^h := \frac{1}{|D_h(X)|} \sum_{e \in D_h(X)} \epsilon_{\text{abs}}^h(e).$$

Hierbei ist $|D_h(X)|$ die Anzahl der Kanten der einfach geschlossenen digitalen Kurve mit der Spur $D_h(X)$. Außerdem definieren wir uns noch den maximalen Fehler

$$\epsilon_{\text{max}}^h := \max_{e \in D_h(X)} \epsilon_{\text{abs}}^h(e).$$

In den Abbildungen 7.2 und 7.3 wird der durchschnittliche und der maximale Fehler gegen die Pixelbreite h geplottet. Die Plots sind doppelt logarithmisch skaliert. Somit kann man an der Steigung der Regressionsgeraden an die Fehlerwerte, die experimentelle Konvergenzgeschwindigkeit ablesen, denn es gilt

$$\log(\epsilon) = m \cdot \log(h) + C \Leftrightarrow \log(\epsilon) = \log(h^m) + C \Leftrightarrow \epsilon = C \cdot h^m.$$

Man erkennt an den Abbildungen, dass der λ -MDCA-Krümmungsschätzer gegenüber dem MDCA-Krümmungsschätzer für den durchschnittlichen Fehler nahezu keine Vorteile besitzt. Für den maximalen Fehler hingegen besitzt der λ -MDCA Krümmungsschätzer eine schnellere Konvergenzgeschwindigkeit.

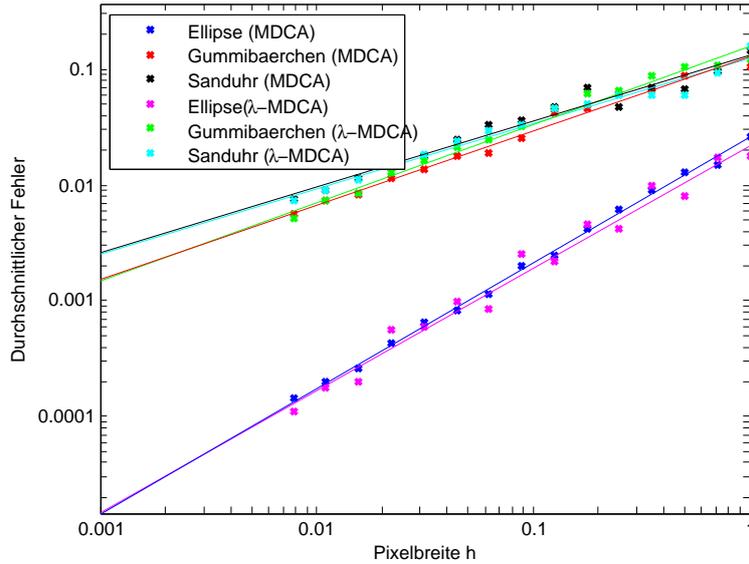


Abbildung 7.2: Durchschnittlicher Fehler

Die Tabelle 7.1 zeigt eine Zusammenfassung der experimentellen Konvergenzgeschwindigkeit der drei Objekte. Man sieht hierbei, dass die Konvergenz für den maximalen Fehler der Sanduhr mit $\mathcal{O}(h^{0.36})$ am langsamsten ist und diese schon sehr nahe an die theoretische Grenze von $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ herankommt. Der durchschnittliche Fehler der Ellipse dagegen konvergiert sogar schneller als $\mathcal{O}(h)$.

7 Experimentelle Ergebnisse

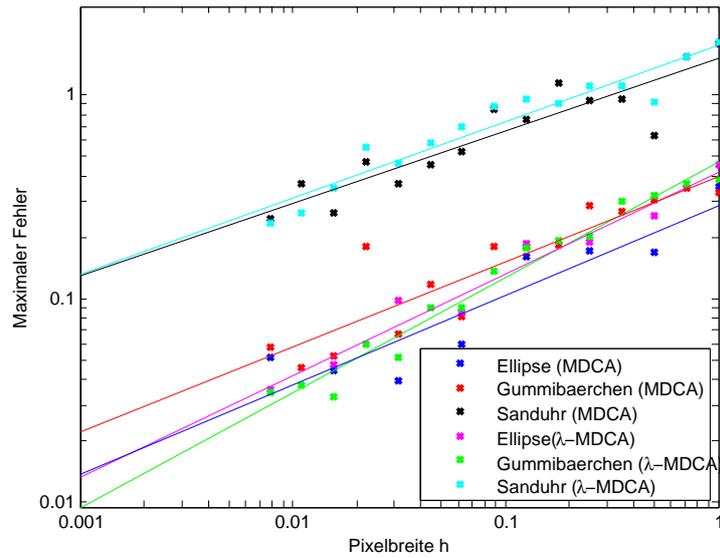


Abbildung 7.3: Maximaler Fehler

	Ellipse	Gummibärchen	Sanduhr
Durchschnittlicher Fehler (MDCA)	$\mathcal{O}(h^{1.08})$	$\mathcal{O}(h^{0.64})$	$\mathcal{O}(h^{0.57})$
Maximaler Fehler (MDCA)	$\mathcal{O}(h^{0.44})$	$\mathcal{O}(h^{0.42})$	$\mathcal{O}(h^{0.36})$
Durchschnittlicher Fehler (λ -MDCA)	$\mathcal{O}(h^{1.06})$	$\mathcal{O}(h^{0.68})$	$\mathcal{O}(h^{0.56})$
Maximaler Fehler (λ -MDCA)	$\mathcal{O}(h^{0.50})$	$\mathcal{O}(h^{0.56})$	$\mathcal{O}(h^{0.37})$

Tabelle 7.1: Experimentelle Konvergenzgeschwindigkeit

7.3 Laufzeit

Ein weiterer Aspekt für die Praxistauglichkeit des Algorithmus ist die Laufzeit. Das quadratische Optimierungsproblem in Punkt 1.5 des Algorithmus 5.2.1 ist separabel [MT93] und kann somit genau wie das lineare Optimierungsproblem in Punkt 1.4 in linearer Zeit gelöst werden [Meg84]. Sei c_e die Anzahl der maximalen digitalen Kreisbögen in denen die Kante $e \in C$ liegt, dann werden die beiden Optimierungsprobleme für jeden Kantenpunkt e genau c_e -mal aufgerufen. Sei $N = |\{e \in C\}|$ die Anzahl der Kanten in C , dann ist folglich die gesamte Laufzeit zur Berechnung der Menge der MDCAs (Algorithmus 5.2.2) in $\mathcal{O}(N^2)$. Es ist also auch die Laufzeit des MDCA-Krümmungsschätzers

7 Experimentelle Ergebnisse

(Algorithmus 5.3.3) und des λ -MDCA-Krümmungsschätzers in $\mathcal{O}(N^2)$.

In Abbildung 7.4 wurde die Laufzeit gegen die Kantenanzahl N geplottet. Man erkennt hier, dass der Algorithmus in der Praxis sogar linear in der Zeit ist. Dies hängt damit zusammen, dass der Punkt 1.3 bzw 3.3 in Algorithmus 5.2.1 fast immer eintritt und das Optimierungsproblem deshalb nur konstant oft abgerufen wird.

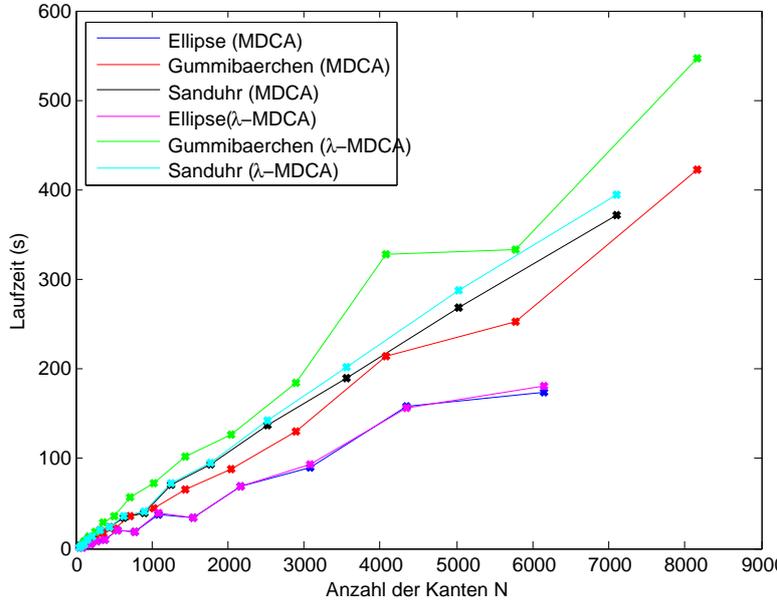


Abbildung 7.4: Laufzeit

7.4 Grenzen der Methode

Ein Objekt, für das der MDCA-Krümmungsschätzer sehr schlecht funktioniert, ist das Quadrat von Abbildung 7.1 (d), beschrieben durch die Menge

$$Q := \{(x, y)^T \in \mathcal{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 9\}.$$

Jeder Randpunkt dieser Menge Q wurde im Satz 6.2.8 ausgeschlossen: Die Krümmung in den vier Ecken des Quadrates ist nicht definiert, bzw. unbeschränkt und in den restlichen Randpunkten ist diese gleich 0. Somit kann man mithilfe von Satz 6.2.8 für keinen der Randpunkte x die Konvergenz gegen die wahre Krümmung $\kappa(Q, x)$ nachweisen. Tatsächlich sieht man bei einer Pixelbreite von beispielsweise $h = 2^{-2}$, dass die Krümmung der Punkte in der Nähe der Ecken sehr schlecht angenähert wird. Dies wird in Abbildung 7.5 veranschaulicht.

Das liegt daran, dass hier ein MDCA über eine gesamte Seite des Quadrats verläuft und der nächste seinen Mittelpunkt bereits gleich neben der Ecke hat. Das heißt für alle

7 Experimentelle Ergebnisse

Punkte auf der Seite, die näher an einer Ecke als an der Mitte der Seite liegen, wird der MDCA an der Ecke verwendet. Dieser hat jedoch eine deutlich größere Krümmung als 0.

Der λ -MDCA-Krümmungsschätzer von Definition 5.3.6 umgeht dieses Problem indem er die digitalen Kreisbögen umso stärker gewichtet, je zentraler der Randpunkt in ihm liegt. Da der MDCA an der Quadratseite deutlich länger ist als der an der Ecke, wird er auch stärker gewichtet und man erhält ein deutlich besseres Ergebnis. Dieses Ergebnis ist in Abbildung 7.6 dargestellt.

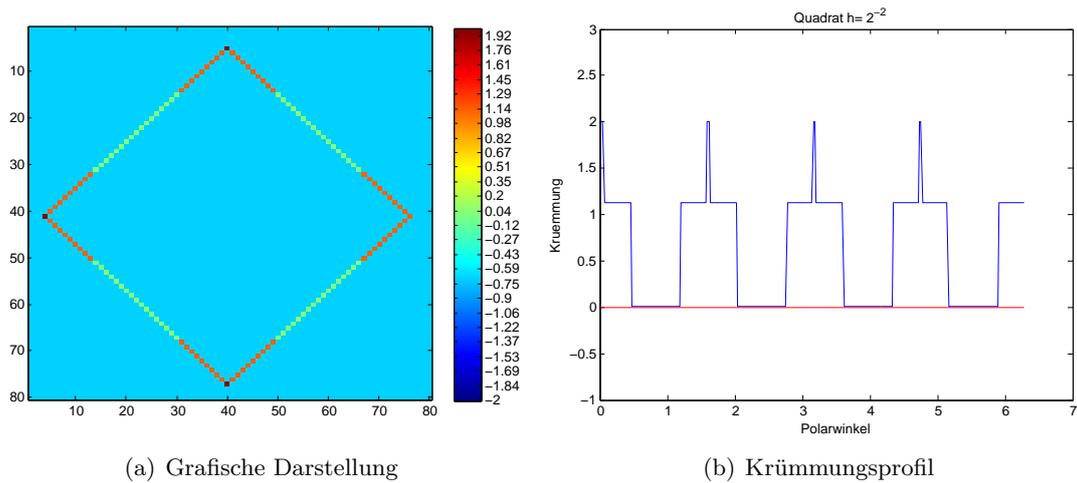


Abbildung 7.5: MDCA-Krümmungsschätzer am Quadrat

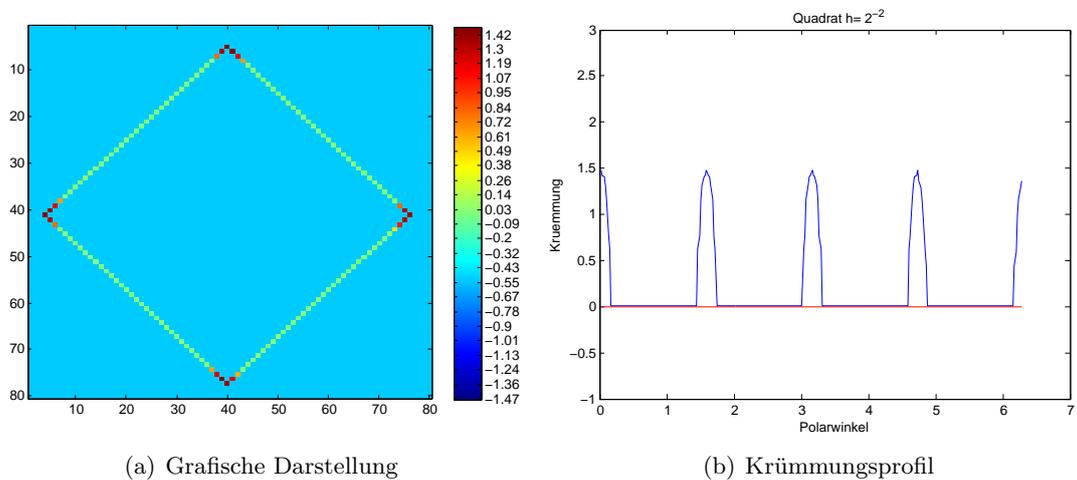


Abbildung 7.6: λ -MDCA-Krümmungsschätzer am Quadrat

8 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Schätzung des Krümmungsprofils entlang des Randes eines digitalen Objektes in einem Schwarz-Weiß-Bild. Hierfür wurde der parameterfreie Krümmungsschätzer aus [RL11] vorgestellt und dessen Mehrgitterkonvergenz bewiesen.

Hierfür war es zunächst nötig, Grundlagen der Differentialgeometrie (Kapitel 2) und der Bildverarbeitung (Kapitel 3) zu erarbeiten. Anschließend wurde in Kapitel 4 die Problemstellung definiert und bisherige Ansätze zur Schätzung der Krümmung vorgestellt. In Kapitel 5 wurde dann der MDCA-Krümmungsschätzer präsentiert, welcher darauf beruht, Kreise zu finden, die bestimmte Pixel innerhalb des Objektes von jenen außerhalb trennt. Die maximalen Teilstücke dieser Pixel, die durch Kreise trennbar sind, nennt man *Maximale Digitale Kreisbögen* (MDCA). Die Krümmung wird dann über den Kehrradius des Radius dieser Kreise berechnet. Zusätzlich wurde dieser zu einem neuartigen Krümmungsschätzer erweitert. Diesen nennen wir in dieser Arbeit λ -MDCA-Krümmungsschätzer.

In Kapitel 6 wurde die Mehrgitterkonvergenz des MDCA-Krümmungsschätzers mit der Konvergenzgeschwindigkeit von $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ für konvexe Mengen mit positivem, stetigem Krümmungsprofil bewiesen. Diese konnte bisher noch für keinen Krümmungsschätzer ohne zusätzliche Voraussetzungen gezeigt werden. Wir sehen außerdem, dass die geschätzte Krümmung für beliebige Objekte in jedem Punkt konvergiert, in dem die echte Krümmung stetig, beschränkt und ungleich 0 ist.

Anschließend wurde in Kapitel 7 sowohl der MDCA-Krümmungsschätzer, als auch der λ -MDCA-Krümmungsschätzer an vier verschiedenen Beispielobjekten mit bekanntem Krümmungsprofil getestet. Wir betrachten hier den maximalen und den relativen Fehler des Schätzers. Man erkennt, dass es durchaus Objekte gibt, für welche die Konvergenzgeschwindigkeit des maximalen Fehlers sehr nahe an die theoretische Grenze von $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ herankommt. Außerdem liefert der λ -MDCA-Krümmungsschätzer vor allem beim maximalen Fehler bessere Ergebnisse als der MDCA-Krümmungsschätzer. Zuletzt betrachten wir ein Quadrat als Beispiel eines Objektes, das mit den Ecken und den Geradenstücken sehr schlechte Voraussetzungen mitbringt. Insbesondere hier sehen wir die besseren Eigenschaften des λ -MDCA-Krümmungsschätzers gegenüber dem MDCA-Krümmungsschätzer.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Einführendes Beispiel	6
1.2	Ergebnisse des Krümmungsschätzers	7
4.1	Definition des Randes	16
4.2	Schmiegekreis einer diskreten Kurve	17
4.3	Möglichkeiten der Anordnung drei aufeinanderfolgender Punkte eines 8- verbundenen diskreten Pfades	17
4.4	Beziehung zwischen $\kappa(t)$ und a	19
5.1	DCA (Digitaler Kreisbogen)	21
6.1	Veranschaulichung des Beweises von Lemma 6.2.4	28
6.2	Hilfszeichnung 1	29
6.3	Hilfszeichnung 2	30
6.4	Hilfszeichnung 3	31
6.5	Veranschaulichung des Beweises von Satz 6.2.7	35
7.1	Beispielobjekte	37
7.2	Durchschnittlicher Fehler	39
7.3	Maximaler Fehler	40
7.4	Laufzeit	41
7.5	MDCA-Krümmungsschätzer am Quadrat	42
7.6	λ -MDCA-Krümmungsschätzer am Quadrat	42

Tabellenverzeichnis

7.1	Experimentelle Konvergenzgeschwindigkeit	40
-----	--	----

Algorithmenverzeichnis

3.2.2	Region Growing	14
5.2.1	Berechnung eines MDCA	22
5.2.2	Berechnung der Menge von MDCAs	23
5.3.3	MDCA-Krümmungsschätzer	24

Literaturverzeichnis

- [AB86] H. ASADA AND M. BRADY. *The curvature primal sketch*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, Volume 8(1), 1986, S.2–14.
- [AB94] R. ADAMS, L. BISCHOF. *Seeded region growing*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, Volume 16(6), 1994, S. 641–647.
- [BGC95] J. W. BULLARD, E. J. GARBOCZI, W. C. CARTER, E. R. FULLER. *Numerical methods for computing interfacial mean curvature*. Computational Materials Science, Volume 4(2), 1995, S. 103–116.
- [BV99] J.-P. BRAQUELAIRE, J.-P., A. VIALARD. *Euclidean Paths: A New Representation of Boundary of Discrete Regions*. Graphical Models and Image Processing, Volume 61(1), 1999, S. 16–43.
- [CLR12] D. COEURJOLLY, J. LACHAUD, T. ROUSSILLON. *Multigrid convergence of discrete geometric estimators*. Digital Geometry Algorithms, Volume 2, 2012, S. 395–424.
- [CMT01] D. COEURJOLLY, S. MIGUET, L. TOUGNE. *Discrete curvature based on osculating circle estimation*. Visual Form, Volume 2059, 2001, S.303–312.
- [Dem11] L. DEMARET. *Mathematical Methods of Image Processing*. Skriptum zur Vorlesung, Technische Universität München, 2011, S. 3f.
- [DLS91] J. S. DUNCAN, F. A. LEE, A. W. M. SMEULDERS, B. L. ZARET. *A bending energy model for measurement of cardiac shape deformity*. Medical Imaging, IEEE Transactions on, Volume 10(3), 1991, S.307–320.
- [DR95] I. DEBLED-RENNESON AND J.-P. REVEILLÈS. *A linear algorithm for segmentation of digital curves*. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Volume 9(4), 1995, S.635–661.
- [DS86] L. DORST, A. W. M. SMEULDERS. *Best linear unbiased estimators for properties of digitized straight lines*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, Volume 8(2), 1986, S.276–282.
- [Fla68] H. FLANDERS. *A proof of Minkowski's inequality for convex curves*. The American Mathematical Monthly, Purdue University, 1968.
- [FVS09] O. FRETTE, G. VIRNOVSKY, D. SILIN. *Estimation of the curvature of an interface from a digital 2D image*. Computational Materials Science, Volume

- 44(3), 2009, S. 867–875.
- [GL95] A. GROSS AND L. LATECKI. *Digitizations preserving topological and differential geometric properties*. Computer Vision and Image Understanding, Volume 62(3), 1995, S. 370–381.
- [Gor92] G. G. GORDON. *Face recognition based on depth and curvature features*. Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on, 1992, S.808–810 .
- [GW08] R. C. GONZALES, R. E. WOODS. *Digital Image Processing*, Third Edition, Journal of Biomedical Optics, Volume 14(2), 2009.
- [Her05] S. HERMANN. *Feature analysis of digital curves*. MSc thesis, The University of Auckland, Computer Science Department, 2005.
- [HK98] S. A. HOJJATOLESLAMI, J. KITTLER. *Region growing: a new approach*. Image Processing, IEEE Transactions on, Volume 7, Issue 7, 1998, S. 1079–1084
- [Hof08] T. HOFFMANN. *Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Skriptum zur Vorlesung, Kyushu University, Fukuoka, 2008.
- [HK07] S. HERMANN, R. KLETTE. *A Comparative Study on 2D Curvature Estimators*. Computing: Theory and Applications, 2007 International Conference on, 2007, S. 584–589.
- [Hof09] T. HOFFMANN. *Differentialgeometrie: Grundlagen*. Skriptum zur Vorlesung, Technische Universität München, 2009, Kapitel 2.
- [JWR05] A. C. JALBA, M. H. F. WILKINSON, J. B. T. M. ROERDINK, M. M. BAYER AND S. JUGGINS. *Automatic diatom identification using contour analysis by morphological curvature scale spaces*. Machine Vision and Applications, Volume 16(4), 2005, S. 217–228.
- [KL09] B. KERAUTRET, J.-O. LACHAUD. *Curvature estimation along noisy digital contours by approximate global optimization*. Pattern Recognition, Volume 42(10), 2009, S. 2265–2278.
- [LVV07] J. LACHAUD, A. VIALARD, F. DE VIEILLEVILLE. *Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours*. Image and Vision Computing, Volume 25(10), 2007, S. 1572–1587.
- [Meg84] N. MEGIDDO. *Linear Programming in Linear Time When the Dimension Is Fixed*. Journal of the ACM, Volume 31(1), 1984, S. 114–127
- [MSK95] J. MATAS, Z. SHAO, J. KITTLER. *Estimation of curvature and tangent direction by median filtered differencing*. Image Analysis and Processing, Volume 974, 1995, S. 83–88.
- [MT93] N. MEGIDDO, A. TAMIR. *Linear time algorithms for some separable quadratic*

Literaturverzeichnis

- programming problems*. Operations Research Letters, Volume 13(4), 1993, S. 203–211.
- [PPC12] A. PASQUALATO, A. PALOMBO, A. CUCINA, M.A. MARIGGIÒ, L. GALLI, D. PASSARO, S. DINICOLA, S. PROIETTI, F. D’ANSELMI, P. COLUCCIA, M. BIZZARRI. *Quantitative shape analysis of chemoresistant colon cancer cells: Correlation between morphotype and phenotype*. Experimental Cell Research, Volume 318(7), 2012, S.835–846.
- [RL11] T. ROUSSILLON, J-O. LACHAUD. *Accurate curvature estimation along digital contours with maximal digital circular arcs*. Combinatorial Image Analysis, Volume 6636, 2011, S. 43–55.
- [RTS09] T. ROUSSILLON, L. TOUGNE, I. SIVIGNON. *On-Line Recognition of Digital Arcs*. LIRIS UMR 5205 CNRS/INSA de Lyon, Université Claude Bernard, 2009.
- [Ulb10] M. ULBRICH. *Lineare Optimierung*. Skriptum zur Vorlesung, Technische Universität München, 2011, S.51.
- [VV93] L. J. VAN VLIET, P. W. VERBEEK. *Curvature and Bending Energy in Digitized 2D and 3D Images*. Proceedings of the 8th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA), 1993, S. 1403–1410.
- [Via96] A. VIALARD. *Geometrical parameters extraction from discrete paths*. Discrete Geometry for Computer Imagery, Volume 1176, 1996, S. 24–35.
- [VLF05] F. D. VIEILLEVILLE, J.-O. LACHAUD, F. FESCHET. *Maximal Digital Straight Segments and Convergence of Discrete Geometric Estimators* Image Analysis, Volume 3540, 2005, S. 137–157.
- [WS93] M. WORRING, A. W. M. SMEULDERS. *Digital curvature estimation*. CVGIP: Image Understanding, Volume 58(3), 1993, S. 366–382.
- [YWB74] I. T. YOUNG, J. E. WALKER, J. E. BOWIE. *An analysis technique for biological shape. I*. Information and Control, Volume 25(4), 1974, S. 357–370.
- [Zuc76] S. W. ZUCKER. *Region growing: Childhood and adolescence*. Computer Graphics and Image Processing, Volume 5(3), 1976, S. 382–399.