



HelmholtzZentrum münchen
Deutsches Forschungszentrum für Gesundheit und Umwelt

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Helmholtz Zentrum München
Institut für Biomathematik und Biometrie

Die Sätze von Faber und Privalov

Masterarbeit im Fach Mathematik

von

Moritz Thon

Aufgabensteller: PD Dr. J. Obermaier

Betreuer: PD Dr. J. Obermaier

Abgabedatum: 05.03.2013



HelmholtzZentrum münchen
German Research Center for Environmental Health

Technische Universität München
Department of Mathematics
Helmholtz Zentrum München
Institute of Biomathematics and Biometry

The Theorems of Faber and Privalov

Master's thesis in mathematics

by

Moritz Thon

Supervisor: PD Dr. J. Obermaier

Advisor: PD Dr. J. Obermaier

Submission date: 05.03.2013

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Masterarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

München, den 04.03.2013

Moritz Thon

Danksagung

Zu großem Dank verpflichtet bin ich meinem Aufgabensteller und Betreuer PD Dr. J. Obermaier, der es mir durch sein großes Engagement und Ideenreichtum ermöglicht hat, diese wissenschaftliche Arbeit zu verfassen.

Summary

This Master's thesis is about proving the theorems of Faber and Privalov. Both theorems concern the growth of the degrees of degree-increasing polynomial Schauder bases for the space of continuous function on a compact interval.

Therefore we will first provide a short introduction to the theory of bases in normed and Banach spaces and prove the theorems we will need later. For instance, we prove a stability theorem for Schauder bases in Banach spaces, which is fundamental for the existence of polynomial Schauder bases. Moreover, we are actually able to use the ideas of this proof for the construction of concrete polynomial Schauder bases.

Afterwards we will start proving the theorems of Faber and Privalov. The canonical space for our investigations is the space of continuous 2π -periodic functions on a compact interval. Because Faber proved his theorem already in 1914, his proof is very elementary and does not use any modern functional analytical results or notations. Hence, his original proof is difficult to read and one motivation of this thesis is to rewrite his proof using the results and the modern notation of functional analysis. Based on a deep lemma dealing with the norm of special continuous operators on the space of continuous 2π -periodic functions we are able to prove the theorem of Privalov. His result is of great interest, because it is in fact the strongest possible result for the growth of the degrees of degree-increasing polynomial Schauder bases.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Motivation und Definition	3
2.2	Beispiel: Basis nach J. P. Schauder von $C[0, 1]$	4
2.3	Eigenschaften von Basen	7
2.4	Gegenbeispiel: Fourierentwicklung	11
2.5	Stabilität von Schauderbasen	14
2.6	Existenz polynomieller Schauderbasen	16
3	Konstruktion von polynomiellen Schauderbasen	23
3.1	Algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[0, 1]$	23
3.2	Trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$	31
4	Notwendige Wachstumsbedingungen der Grade polynomieller Schauderbasen	43
4.1	Trigonometrisch polynomielle Schauderbasen	43
4.2	Algebraisch polynomielle Schauderbasen	55
4.3	Gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasen	59
5	Ausblick	69
	Literaturverzeichnis	71

1 Einleitung

Ein sehr wichtiger Funktionenraum der angewandten, aber auch der theoretischen Mathematik ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem kompaktem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, in Zeichen $C[a, b]$. Versieht man diesen Vektorraum mit einer geeigneten Norm, der sogenannten Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so ist dieser normierte Vektorraum $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ sogar ein Banachraum. Für eine präzisere Definition dieser Sachverhalte siehe Definition/Proposition 2.4. Dieser Banachraum ist beispielsweise der geeignete Kandidat, um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von wohlgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen zu zeigen. Auch im Bereich der Funktionalanalysis ist der Raum $C[a, b]$ von großem Interesse, da dieser für jeden reellen separablen Banachraum eine isometrisch isomorphe Kopie in Form eines Untervektorraumes enthält (vergleiche Satz von Banach-Mazur). Man spricht in einem solchen Fall von einem *universellen* Banachraum, was der Bedeutung des Raumes $C[a, b]$ weiteren Ausdruck verleiht.

Wir wollen im Laufe dieser Arbeit eine geeignete „einfache“ Basis für diesen Raum finden, um seine Elemente leichter darstellen zu können. Unter einer (Hamel-) Basis versteht man im Sinne der linearen Algebra das folgende:

Definition 1.1 (Hamelbasis). Sei X ein Vektorraum. Eine Menge $B \subset X$ heißt *Hamelbasis*, falls sie linear unabhängig ist und sich jedes Element $x \in X$ als *endliche* Linearkombination von Elementen aus B darstellen lässt.

Hätten wir also eine Hamelbasis B von $C[a, b]$ zur Hand, so könnten wir jede stetige Funktion als endliche Linearkombination von Basisfunktionen darstellen und hätten eine einfache Darstellung aller seiner Elemente, das heißt aller stetigen Funktionen mit dem Definitionsgebiet $[a, b]$, erreicht. Wie man sich leicht klar machen kann, muss eine Hamelbasis B von $C[a, b]$ unendlich viele Elemente enthalten. Zusammen mit seiner Vollständigkeit erfüllt der Banachraum $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ daher die Voraussetzungen des folgenden Satzes (ohne Beweis, siehe dazu [3], Seite 25):

Satz 1.2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit $\dim(X) = \infty$. Dann ist jede Hamelbasis B von X überabzählbar.

Aus diesem Grund ist die Hamelbasis B von $C[a, b]$ nur von theoretischem Interesse und wir wollen uns in dieser Arbeit einem anderen Basiskonzept zuwenden: den Schauderbasisen. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des Konzepts der Orthonormalbasen in unendlich-dimensionalen separablen Innenprodukträumen auf unendlich-dimensionale normierte Vektorräume. Dieses Konzept ist also insbesondere für unseren unendlich-dimensionalen Banachraum geeignet. Kurz gesagt fordern wir für eine Schauderbasis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ eines normierten Vektorraumes $(X, \|\cdot\|)$, dass sich jedes Element $x \in X$ auf eindeutige Art und Weise als „unendliche Linearkombination“ darstellen lässt, ohne eine Orthogonalitätsbeziehung und Normierung wie im Fall von Orthonormalbasen zu erfüllen. Für eine präzise Definition einer Schauderbasis

siehe die Definitionen 2.1 und 2.11. Da nicht jeder Banachraum eine Schauderbasis besitzt (vergleiche [4]), bleibt zunächst zu klären, ob im Raum $C[a, b]$ eine Schauderbasis existiert. Diese Frage werden wir mit Beispiel 2.5 für einen Spezialfall und schließlich in Proposition 2.23 a) endgültig positiv beantworten.

Das nächste Ziel wird sein, nicht nur eine „beliebige“, sondern eine „einfache“ Schauderbasis für $C[a, b]$ in Form einer Folge aus algebraischen Polynomen zu finden. Einen abstrakten Existenzbeweis dazu werden wir am Ende des zweiten Kapitels in Satz 2.25 a) führen.

Im dritten Kapitel wollen wir den abstrakten Existenzbeweis des zweiten Kapitels verwenden, um eine konkrete algebraisch polynomielle Schauderbasis zu konstruieren. Wir erhalten dadurch eine Vorstellung, wie eine solche „einfache“ Schauderbasis aussehen kann.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der folgenden Frage: Vorausgesetzt eine algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[a, b]$ ist dem Grade nach aufsteigend angeordnet, wie müssen diese Grade dann mindestens wachsen? Zur Beantwortung dieser Frage werden wir ganz wesentlich den Raum der (geraden) 2π -periodischen stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$, kurz $C_p[a - \pi, a + \pi]$, studieren. Dies ist auch der Grund, warum wir diesen Raum bereits in den vorherigen Kapiteln zwei und drei einführen und betrachten werden. Darüber hinaus ist das Studium dieses Raumes generell sehr interessant, da es im engen Zusammenhang zur Fourierentwicklung von 2π -periodischen Funktionen steht. Eines der Hauptresultate zur Beantwortung dieser Frage ist ein Satz von G. Faber aus dem Jahre 1914. Da zu dem Zeitpunkt die Theorie der Funktionalanalysis und Schauderbasisen noch nicht entwickelt war, ist es umso erstaunlicher, dass er den Beweis mit elementaren Mitteln führen konnte. Aus Ermangelung funktionalanalytischer Methoden und Schreibweisen, ist seine Arbeit schwer verständlich und daher ist eine der wesentlichen Motivationen dieser Masterarbeit die Neufassung dieses alten Beweises. Im Anschluss beweisen wir ein Resultat von Al. A. Privalov aus dem Jahre 1987, das uns ein stärkeres Wachstum der Grade von polynomiellen Schauderbasisen garantiert als das von Faber. Wie Al. A. Privalov kurze Zeit später ebenfalls zeigen konnte, ist dieses Resultat unter den gegebenen Voraussetzungen das bestmögliche, was dem Satz zusätzlich Bedeutung verleiht. Wir wollen es deshalb in dieser Arbeit beweisen.

2 Grundlagen

Bevor wir uns im vierten Kapitel den Sätzen von G. Faber und Al. A. Privalov zuwenden, wollen wir in diesem Kapitel die dazu benötigten Grundlagen schaffen. Die Definitionen, Sätze und Beweise sind dabei so gehalten, dass sie jeder nachvollziehen kann, der über das Grundstudium hinaus über grundlegende Kenntnisse der Funktionalanalysis verfügt. Die Sätze und Beweise dieses Kapitels sind hierbei eine Wiedergabe von Resultaten aus der von mir besuchten Vorlesung „Schauderbasen“ von PD Dr. J. Obermaier aus dem Sommersemester 2012, Technische Universität München.

2.1 Motivation und Definition

Durch Satz 1.2 haben wir gesehen, dass das Konzept der Hamelbasis nicht geeignet ist, um eine einfache Darstellung aller Elemente x aus einem unendlich-dimensionalen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ zu erreichen. Wegen der Unendlich-Dimensionalität ist das „Beste“ was wir als alternatives Basiskonzept erwarten können, eine Darstellung aller Elemente $x \in X$ über eine „unendliche Linearkombination“ einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$. Da dies formal auch in normierten Vektorräumen möglich ist, wollen wir es auch allgemein formulieren:

Definition 2.1 (Basis). Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim(X) = \infty$. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ heißt *Basis* von X , falls für jedes $x \in X$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \quad \text{mit } \lambda_0, \lambda_1, \dots \in \mathbb{K} \quad (2.1)$$

existiert.

Bemerkung 2.2. Die Darstellung $X \ni x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$ ist genau dann eindeutig, wenn aus $X \ni 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k x_k$ bereits $\nu_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt.

Generalvoraussetzung. Falls nicht anders erwähnt meinen wir künftig mit dem Begriff „Basis“ im Zusammenhang mit einem normierten Vektor- oder Banachraum X , eine Basis im Sinne von Definition 2.1. Dabei sei X ein *unendlich*-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

Wir werden des weiteren noch häufig von den folgenden Begriffen Gebrauch machen:

Definition 2.3 (Koordinatenfunktionale und kanonische Projektionen). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $X \ni x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_n : X &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \lambda_n \end{aligned}$$

n -tes *Koordinatenfunktional* (bezüglich $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$) und die Abbildung

$$\begin{aligned} P_n : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^n c_k(x) x_k \end{aligned}$$

heißt die n -te *kanonische Projektion* (bezüglich $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$).

2.2 Beispiel: Basis nach J. P. Schauder von $C[0, 1]$

Wir wollen uns nun ein konkretes Beispiel für eine Basis anschauen. Dazu betrachten wir den Raum $X := C[0, 1]$ zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{\infty}$.

Definition/Proposition 2.4 ($C[a, b]$). Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist der *Raum der stetigen Funktionen* auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, kurz

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

zusammen mit der *Supremumsnorm* $\|\cdot\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |\cdot(x)|$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum.

Beweis. Es ist leicht einzusehen, dass $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ ein unendlich-dimensionaler normierter Vektorraum ist. Der Beweis der Vollständigkeit würde uns zu weit vom eigentlichen Thema entfernen und kann beispielsweise in [14], Seite 5f nachgelesen werden. \square

Beispiel 2.5 (klassische Basis von $C[0, 1]$, J. P. Schauder, 1927). Wir zeigen, dass die Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C[0, 1]$ definiert durch

$$\begin{aligned} C_0(x) &:= 1, \quad C_1(x) := x, \\ C_{2^l+m}(x) &:= \begin{cases} 2^{l+1} \left(x - \frac{2m-2}{2^{l+1}}\right) & \text{für } \frac{2m-2}{2^{l+1}} \leq x < \frac{2m-1}{2^{l+1}} \\ -2^{l+1} \left(x - \frac{2m}{2^{l+1}}\right) & \text{für } \frac{2m-1}{2^{l+1}} \leq x < \frac{2m}{2^{l+1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &\quad \text{für alle } m = 1, \dots, 2^l; \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

eine Basis von $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ ist. Siehe dazu Abbildung 2.1.

Diese Folge entspricht „Dreiecksfunktionen“ zu den Stützstellen

$$s_0 := 0, \quad s_1 := 1, \quad s_2 := \frac{1}{2}, \quad s_3 := \frac{1}{4}, \quad s_4 := \frac{3}{4}, \quad s_5 := \frac{1}{8}, \quad s_6 := \frac{3}{8}, \quad \dots$$

$$\text{also } s_{2^l+m} := \frac{2m-1}{2^{l+1}} \quad \text{für alle } m = 1, \dots, 2^l; \quad l = 0, 1, \dots$$

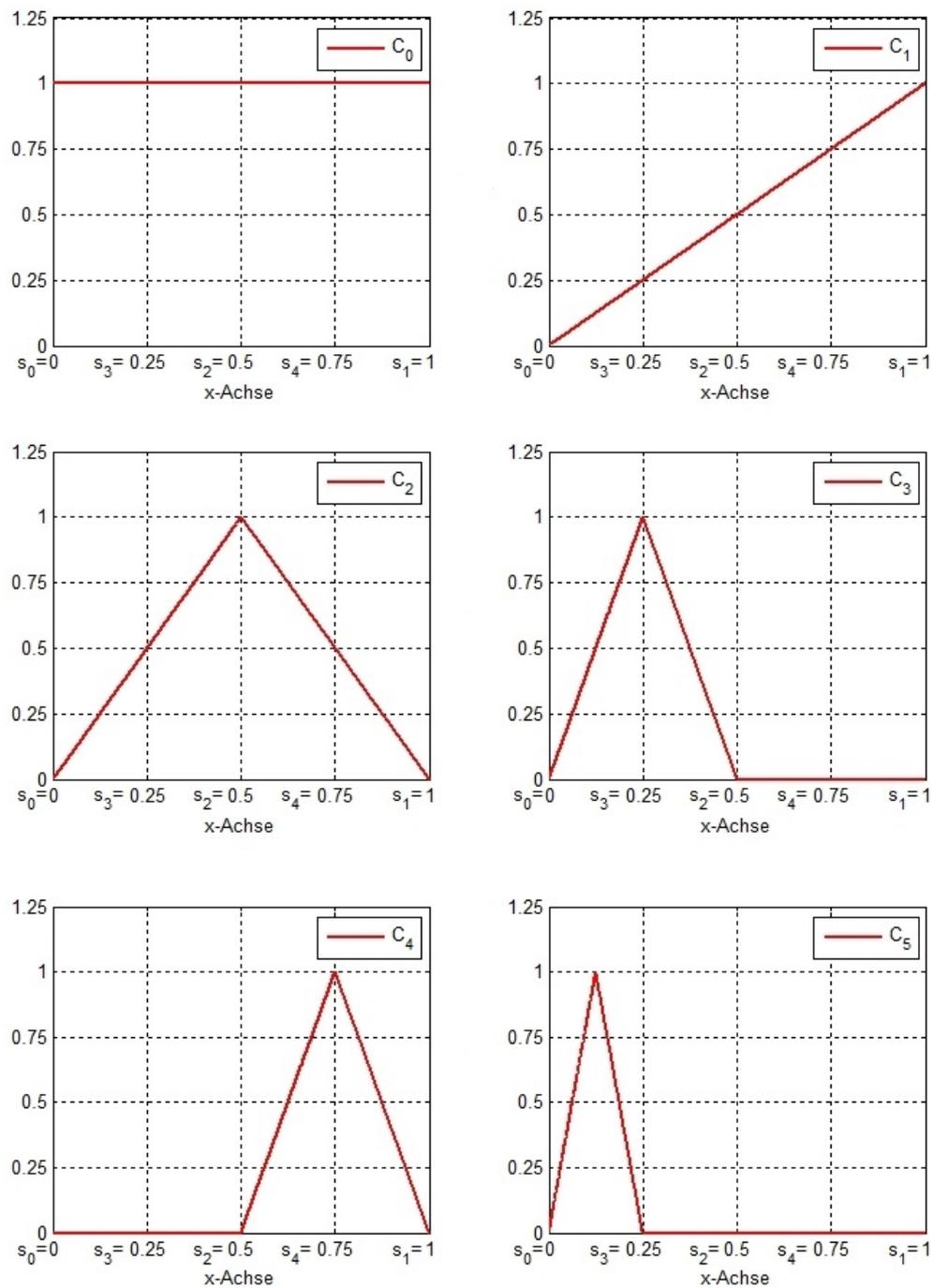


Abbildung 2.1: Die ersten sechs Folgenglieder der Basis nach J. P. Schauder von $C[0, 1]$.

Wir erhalten damit per Definition

$$C_k(s_j) \stackrel{!}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j < k \end{cases} . \quad (2.2)$$

Sei $f \in C[0, 1]$. Die Idee ist nun, dass wir die gegebene Funktion $f \in C[0, 1]$ an den Stützstellen s_k mittels der Dreiecksfunktionen C_k interpolieren. Dies geschieht durch die folgende Wahl der „Koordinatenfunktionale“ c_k und „kanonischen Projektionen“ P_k :

$$\begin{aligned} c_0(f) &:= f(s_0), \quad P_0(f) := c_0(f)C_0, \\ c_k(f) &:= f(s_k) - P_{k-1}(f)(s_k), \quad P_k(f) := \sum_{j=0}^k c_j(f)C_j \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Wir lassen im Folgenden die Anführungsstriche weg, obwohl wir dafür erst wissen müssten, dass die Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $C[0, 1]$ ist. Die k -te kanonische Projektion von f , $P_k(f)$ ist damit eine stetige und stückweise lineare Funktion, die an den Stützstellen s_0, \dots, s_k mit der gegebenen Funktion f übereinstimmt.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $f \in C[0, 1]$ auf dem Kompaktum $[0, 1]$ sogar gleichmäßig stetig ist (Satz von Heine)

$$\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0, 1] \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Wir wählen nun ein $N \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass der Abstand für alle bezüglich der natürlichen Ordnung auf \mathbb{R} benachbarten Paare von Stützpunkten s_{j_1}, s_{j_2} mit $j_1, j_2 \in \{0, \dots, N\}$ kleiner δ ist.

Sei $x \in [0, 1]$ beliebig und s_{j_1}, s_{j_2} die zwei benachbarten Stützstellen von x , also $x \in [s_{j_1}, s_{j_2}]$ und $|s_{j_1} - s_{j_2}| < \delta$. Es existiert damit $\gamma \in [0, 1]$, sodass $x = (1-\gamma)s_{j_1} + \gamma s_{j_2}$. Aufgrund der Linearität von $P_N(f)(x)$ auf $[s_{j_1}, s_{j_2}]$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} |f(x) - P_N(f)(x)| &= |f(x) - (1-\gamma)P_N(f)(s_{j_1}) - \gamma P_N(f)(s_{j_2})| \\ &\leq (1-\gamma)|f(x) - \underbrace{P_N(f)(s_{j_1})}_{=f(s_{j_1})}| + \gamma|f(x) - \underbrace{P_N(f)(s_{j_2})}_{=f(s_{j_2})}| \stackrel{(2.3)}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich haben wir, da x und f beliebig waren, die Darstellungseigenschaft von $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(f) = f \quad \text{für alle } f \in C[0, 1] \quad (\text{bezüglich } \|\cdot\|_\infty)$$

gezeigt. Zur Eindeutigkeit der Darstellung sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k C_k(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [1, 0]. \quad (2.4)$$

Werten wir (2.4) an der Stelle $x = s_0$ aus, so erhalten wir mit (2.2) $\nu_0 = 0$. Angenommen wir hätten bereits $\nu_0 = \dots = \nu_j = 0$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. Betrachten wir in (2.4) nun die Stelle $x = s_{j+1}$, so erhalten wir zusammen mit der Annahme

$$0 = \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu_k C_k(s_{j+1}) \stackrel{(2.2)}{=} \nu_{j+1}$$

und es folgt induktiv $\nu_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten daraus die Eindeutigkeit der Darstellung und haben insgesamt gezeigt, dass die Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $C[0, 1]$ ist.

Bemerkung 2.6. Man kann zeigen, dass die Basis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $C[0, 1]$ aus Beispiel 2.5 nicht *unbedingt* ist. Das heißt, dass die Entwicklung bezüglich der Basis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ für mindestens ein $f \in C[0, 1]$ von der Reihenfolge der Summation abhängt. Man kann darüber hinaus zeigen, dass *jede* Basis von $C[0, 1]$ nicht unbedingt ist ([12], Seite 435f).

Bemerkung 2.7. Die Frage, ob jeder separable Banachraum eine Schauderbasis besitzt, war lange Zeit ein offenes Problem. Erst im Jahre 1973 gelang es P. Enflo einen Banachraum zu konstruieren der keine Schauderbasis besitzt (siehe [4]). Er konnte die Frage damit negativ beantworten.

2.3 Eigenschaften von Basen

Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften von Basen in normierten Vektor- beziehungsweise Banachräumen zeigen, die wir an späterer Stelle benutzen werden.

Proposition 2.8. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Menge $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig.*

Beweis. Seien $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschieden und $\nu_{k_1}, \dots, \nu_{k_n} \in \mathbb{K}$ mit

$$\nu_{k_1} x_{k_1} + \dots + \nu_{k_n} x_{k_n} = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung der $0 \in X$ folgt $\nu_{k_1} = \dots = \nu_{k_n} = 0$. Da $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ beliebig gewählt waren, ist jede endliche Teilmenge von $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig, was der Behauptung entspricht. \square

Die in Definition 2.3 definierten Koordinatenfunktionale $c_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ und kanonischen Projektionen $P_n : X \rightarrow X$ sind trivialerweise lineare Abbildungen. Wir zeigen nun, dass diese Abbildungen mit der vorausgesetzten Vollständigkeit von X , auch stetig sind. Wir benötigen hierzu das folgende Lemma:

Definition/Lemma 2.9 (Induzierte Norm). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Dann wird durch

$$\| \|x\| \| := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|P_n(x)\| \quad \text{für alle } x \in X$$

eine Norm auf X definiert. Sie heißt die *durch die Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ induzierte Norm*.

Weiter ist der Raum $(X, \| \cdot \|)$ ein Banachraum und es existiert ein $C > 0$ mit

$$\frac{1}{C} \| \|x\| \| \leq \|x\| \leq \| \|x\| \| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Normen $\|\cdot\|$ und $\| \cdot \|$ sind also äquivalent.

Beweis. Trivialerweise ist durch $\|\cdot\|$ eine Norm auf X definiert. Da die Norm $\|\cdot\|$ aufgefasst als Abbildung $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Abbildung ist, erhalten wir:

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x)\| \leq \sup_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X. \quad (2.5)$$

Damit ist die Identitätsabbildung $Id_X : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$, $x \mapsto x$ ein stetiger und trivialerweise auch linearer und bijektiver Operator. Angenommen, wir hätten bereits gezeigt, dass $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Da in diesem Fall die beiden beteiligten Räume der Identitätsabbildung Banachräume sind, folgt mit dem Satz der stetigen Inversen, dass die Inverse Identitätsabbildung $Id_X^{-1} : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$, $x \mapsto x$ ebenfalls stetig ist. Daher existiert ein $C > 0$:

$$\frac{1}{C} \|x\| \leq \|x\| \stackrel{(2.5)}{\leq} \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Sei dazu $(y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis ist, erhalten wir für alle y_j mit $j \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Darstellung bezüglich $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$:

$$y_j = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k,j} x_k \quad \text{mit Grenzwertbildung in } (X, \|\cdot\|).$$

1. Wir wollen nun zeigen, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(\lambda_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist. Seien dazu $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i \geq j$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\lambda_{k,i} - \lambda_{k,j}| \|x_k\| = \left\| \sum_{n=0}^k (\lambda_{n,i} - \lambda_{n,j}) x_n - \sum_{n=0}^{k-1} (\lambda_{n,i} - \lambda_{n,j}) x_n \right\| \\ &= \|P_k(y_i - y_j) - P_{k-1}(y_i - y_j)\| \leq 2 \|y_i - y_j\| \rightarrow 0 \quad (i, j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(mit $P_{-1} := 0$), da $(y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$ ist. Zusammen mit $x_k \neq 0$ folgt, dass $(\lambda_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} ist. Mit der Vollständigkeit von \mathbb{K} ist $(\lambda_{k,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ insbesondere konvergent und da $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig war erhalten wir:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \exists \lambda_k := \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k,j} \in \mathbb{K}. \quad (2.6)$$

2. Wir zeigen nun, dass $\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $(y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$, $\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall i, j \geq M, \forall n \in \mathbb{N}_0 :$

$$\left\| \sum_{k=0}^n \lambda_{k,i} x_k - \sum_{k=0}^n \lambda_{k,j} x_k \right\| = \|P_n(y_i - y_j)\| \leq \|y_i - y_j\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.7)$$

Mit der Grenzwertbildung $i \rightarrow \infty$ in (2.7) und (2.6) erhalten wir weiter:

$$\exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall j \geq M, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad (2.8)$$

$$\left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k - \sum_{k=0}^n \lambda_{k,j} x_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.9)$$

Insbesondere gilt also für $j = M$:

$$\begin{aligned} & \exists M \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : \\ & \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k - \sum_{k=0}^n \lambda_{k,M} x_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wir betrachten nun das Folgeelement $y_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda_{k,M} x_k$. Da diese Entwicklung bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent ist, ist $\left(\sum_{k=0}^n \lambda_{k,M} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N}_0 : \forall m \geq n \geq N : \\ & \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_{k,M} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wir können also $\forall m \geq n \geq N$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k x_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k x_k - \sum_{k=n+1}^m \lambda_{k,M} x_k \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_{k,M} x_k \right\| \\ & \stackrel{(2.11)}{<} \left\| \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^m \lambda_{k,M} x_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^n \lambda_{k,M} x_k \right\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ & \stackrel{(2.10)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

schließen und haben somit gezeigt, dass $\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$ ist. Mit der Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|)$ erhalten wir damit:

$$\exists y := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \in X.$$

3. Wir wollen nun zeigen, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y - y_j\| = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und $M \in \mathbb{N}_0$ aus (2.8). Dann gilt für alle $j \geq M$:

$$\begin{aligned} \|y - y_j\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|P_n(y - y_j)\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k - \sum_{k=0}^n \lambda_{k,j} x_k \right\| \stackrel{(2.9)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben damit die Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|)$ gezeigt, was den Beweis beendet. \square

Mit dem soeben bewiesenen Lemma können wir nun zeigen, dass die Koordinatenfunktionale und kanonischen Projektionen stetige Abbildungen sind, falls X ein Banachraum ist:

Satz 2.10. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die n -te kanonische Projektion P_n und das n -te Koordinatenfunktional c_n linear und stetig. Darüber hinaus existiert ein $C > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$1 \leq \|P_n\| \leq C. \quad (2.12)$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Trivialerweise ist P_n linear und eine Projektion, das heißt es gilt $(P_n)^2(x) = P_n(x) \forall x \in X$. Folglich ist $\|P_n\| = \|P_n^2\| \leq \|P_n\|^2$ und zusammen mit $P_n \neq 0$ erhalten wir:

$$\|P_n\| \geq 1. \quad (2.13)$$

Für die Stetigkeit von P_n genügt es wegen dessen Linearität (2.12) zu zeigen. Nach Lemma 2.9 existiert ein $C > 0$:

$$\|P_n(x)\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \|P_m(x)\| = \|x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X$$

woraus

$$1 \stackrel{(2.13)}{\leq} \|P_n\| \leq C \quad (2.14)$$

folgt. Da C unabhängig von $n \in \mathbb{N}_0$ ist, folgt zudem die gleichmäßige Beschränktheit der kanonischen Projektionen.

Trivialerweise ist auch c_n linear und daher wegen

$$|c_n(x)|_{x_n \neq 0} = \frac{\|c_n(x)x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|}{\|x_n\|} \stackrel{(2.14)}{\leq} \frac{2C}{\|x_n\|} \|x\|$$

auch stetig. Dies beendet den Beweis. \square

Wir wollen nun der Vollständigkeit halber den Begriff der Basis etwas präzisieren.

Definition 2.11 (Schauderbasis). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt *Schauderbasis*, falls alle Koordinatenfunktionale c_n und kanonischen Projektionen P_n stetig sind, sowie ein $C > 0$ existiert mit $\|P_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Konstante $0 \leq K := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|P_n\| < \infty$ heißt in diesem Fall

Basiskonstante.

Beispiel 2.12. Wir haben in Beispiel 2.5 bereits gezeigt, dass der Raum $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ eine Basis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ besitzt. Da dieser Raum zudem vollständig ist (siehe Proposition 2.4) können wir Satz 2.10 anwenden und es folgt, dass $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist. In Beispiel 2.5 haben wir außerdem gezeigt, dass für alle $f \in C[0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die n -te kanonische Projektion P_n die lineare Interpolation von f an den Punkten s_0, \dots, s_n ist. Daher ist

$$\|P_n(f)\|_\infty = \max\{|f(s_0)|, \dots, |f(s_n)|\} \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

und es folgt, dass die Basiskonstante $K = 1$ ist.

Bemerkung 2.13. Satz 2.10 zeigt, dass in einem Banachraum die Begriffe der Basis und Schauderbasis äquivalent sind. Obwohl wir uns im Folgendem bei konkreten Räumen stets mit Banachräumen beschäftigen, werden wir die beiden Begriffe der Genauigkeit halber trotzdem weiter unterscheiden.

2.4 Gegenbeispiel: Fourierentwicklung

Wir betrachten als zweites Beispiel den Raum $C_p[-\pi, \pi]$.

Definition/Proposition 2.14 ($C_p[a, b]$). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist der Raum der $(b - a)$ -periodischen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, kurz

$$C_p[a, b] := \{f \in C[a, b] \mid f(a) = f(b)\},$$

zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\cdot(x)|$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum.

Beweis. Offensichtlich ist $C_p[a, b]$ ein unendlich-dimensionaler Untervektorraum vom $C[a, b]$. Wir zeigen nun, dass $(C_p[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ auch ein abgeschlossener Untervektorraum von $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Sei dazu $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C_p[a, b]$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \in C[a, b]$. Aus

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(a) - f(b)| &\leq |f(a) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(b)| \\ &\stackrel{f_k \in C_p[a, b]}{=} |f(a) - f_k(a)| + |f_k(b) - f(b)| \leq 2\|f - f_k\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

folgt $f(a) = f(b)$ und somit $f \in C_p[a, b]$. Damit ist $(C_p[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ als abgeschlossener Untervektorraum des Banachraumes $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ (siehe Proposition 2.4) selbst ein Banachraum. \square

Mit Hilfe von Satz 2.10 wollen wir nun zeigen, dass das trigonometrische System $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ keine Basis von $(C_p[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ bildet. Entwickelt man eine Funktion $f \in C_p[-\pi, \pi]$ bezüglich dieses Systems, so entspricht dies exakt der reellen Darstellung der Fourierentwicklung von f .

Definition 2.15 (Fourierentwicklung). Für ein $f \in C_p[-\pi, \pi]$ heißt die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$, mit

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

die Folge der (komplexen) Fourierkoeffizienten von f . Für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die Funktion $s_n(f)$, definiert durch

$$s_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi],$$

die (komplexe Darstellung der) Fourierentwicklung von f zur Ordnung n . Konvergiert die Fourierentwicklung von f mit steigender Ordnung gleichmäßig gegen f , das heißt es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0$, so nennen wir den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f)$ die (komplexe) Fourierentwicklung von f .

Mittels der Eulerschen Formel zeigt man leicht, dass sich die Fourierentwicklung von f zur Ordnung n in folgende Form bringen lässt:

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (2.15)$$

$$\text{mit } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \in \mathbb{K}$$

$$\text{und } b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \in \mathbb{K}.$$

Man nennt dies die *reelle Darstellung der Fourierentwicklung von f zur Ordnung n* und die Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißen die *reellen Fourierkoeffizienten von f* . Konvergiert die Fourierentwicklung gleichmäßig gegen f , so heißt die Reihe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f)$ in der Form (2.15) die *reelle Darstellung der Fourierentwicklung von f* .

Bemerkung 2.16. Für die Konvergenz der Fourierentwicklung in Definition 2.15 ist es hinreichend, dass f stückweise stetig differenzierbar ist (siehe [6], Seite 336ff). Für nur stetiges f lässt sich zeigen, dass die Fourierentwicklung von f bezüglich der „ L^2 -Norm“ konvergiert. Auch zeigt man mit Hilfe der „ L^2 -Orthogonalität“ von Sinus und Kosinus leicht die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten (siehe [6], Seite 339ff).

Beispiel 2.17 (Fourierentwicklung). Wir betrachten die Folge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C_p[-\pi, \pi]$ definiert durch $T_0(x) := 1$, $T_{2k-1}(x) := \cos(kx)$, $T_{2k}(x) := \sin(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und nehmen an, dies ist eine Basis von $C_p[-\pi, \pi]$. Wegen Proposition 2.14 und Satz 2.10 wäre dies auch eine Schauderbasis.

Mit dieser Wahl der Basisfolge entspricht die $2n$ -te kanonische Projektion $P_{2n}(f)$ einer stetigen Funktion $f \in C_p[-\pi, \pi]$, für die die Fourierentwicklung gleichmäßig gegen f konvergiert, exakt der reellen Darstellung der Fourierentwicklung von f zur Ordnung n . Dies liegt daran, dass die Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt sind. Wir zeigen nun, dass

$$\|P_{2n}\| > \frac{1}{2\pi} \log(4n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Es ergibt sich dadurch ein Widerspruch zur gleichmäßigen Beschränktheit der Operatornormen der kanonischen Projektionen $\|P_{2n}\| \leq K$ durch die Basiskonstante $K > 0$ (siehe Satz 2.10). Folglich war unsere Annahme falsch und die Folge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist keine Basis von $C_p[-\pi, \pi]$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Funktion $\Psi(x) := \frac{1}{2} \sin(\frac{2n+1}{2}|x|) \in C_p[-\pi, \pi]$. Da diese Funktion stückweise stetig differenzierbar ist, besitzt sie eine gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung in reeller Darstellung (siehe [6], Seite 336ff):

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \quad (2.17)$$

mit den reellen Fourierkoeffizienten

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x) \cos(jx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - (2j)^2}$$

$$\text{und } b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x) \sin(jx) dx = 0.$$
(2.18)

Da $\|\Psi\|_{\infty} = \frac{1}{2}$ und die Fourierentwicklung bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$ konvergiert, finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, sodass

$$\|s_m(\Psi)\|_{\infty} \leq 1. \tag{2.19}$$

Wir verwenden nun

$$f := s_m(\Psi) \tag{2.20}$$

als Kandidat um (2.16) zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|P_{2n}\| &= \sup_{g \in C_p, \|g\|_{\infty} \leq 1} \|P_{2n}(g)\|_{\infty} \stackrel{(2.19)}{\geq} \|P_{2n}(f)\|_{\infty} \\ &= \|s_n(s_m(\Psi))\|_{\infty} \stackrel{m > n}{=} \|s_n(\Psi)\|_{\infty} \geq s_n(\Psi)(0) \\ &\stackrel{(2.17), (2.18)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{j=1}^n \left(2 \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - (2j)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2n+1+2j} + \frac{1}{2n+1-2j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{2j-1} \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n+1} \int_j^{j+1} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{\pi} \int_1^{2n+2} \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \log(4n+3) > \frac{1}{2\pi} \log(4n). \end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass die Folge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ keine Basis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist.

Bemerkung 2.18. Wir haben durch Beispiel 2.17 insbesondere gezeigt, dass es eine stetige (nicht stückweise stetig differenzierbare) 2π -periodische Funktion geben muss, die sich nicht gleichmäßig fourierentwickeln lässt, oder deren Fourierkoeffizienten nicht eindeutig bestimmt sind. Durch die „ L^2 -Orthogonalität“ von Sinus und Kosinus kann man weiter zeigen, dass aus der Konvergenz der Fourierentwicklung die Eindeutigkeit der Koeffizienten folgt und erhält somit durch Beispiel 2.17:

$$\exists f \in C_p[-\pi, \pi] : \lim_{k \rightarrow \infty} \|s_k(f) - f\|_{\infty} \neq 0.$$

2.5 Stabilität von Schauderbasisen

Wir wollen im folgenden Abschnitt zeigen, dass in jedem Banachraum X die Eigenschaft einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ eine Schauderbasis zu sein, stabil ist. Dies bedeutet, dass jede weitere Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$, die „nah genug“ an der Schauderbasis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ liegt, selbst wieder eine Schauderbasis ist. Bevor wir diese Stabilitätseigenschaft von Schauderbasisen zeigen können, benötigen wir die folgenden beiden Sätze:

Proposition 2.19. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit Basis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ eine Folge. Dann ist auch $(\mu_k x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X .*

Beweis. Sei $x \in X$. Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis ist, folgt

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k = \sum_{\mu_k \neq 0} \frac{\lambda_k}{\mu_k} (\mu_k x_k)$$

und wir haben die Darstellungseigenschaft von $(\mu_k x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gezeigt. Für die Eindeutigkeit sei

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k (\mu_k x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu_k \mu_k) x_k.$$

Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis ist, erhalten wir $\nu_k \mu_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ und zusammen mit $\mu_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ folgt weiter

$$\nu_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir haben also auch die Eindeutigkeit der Darstellung von $(\mu_k x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gezeigt. Die Folge $(\mu_k x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist also eine Basis von X . \square

Satz 2.20. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume mit einem Isomorphismus $I : X \rightarrow Y$ (das heißt I linear, stetig, invertierbar und I^{-1} stetig). Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X , dann ist $(I(x_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von Y .*

Beweis. Sei $y \in Y$. Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X ist, erhalten wir

$$X \ni I^{-1}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k. \quad (2.21)$$

Da I stetig ist gilt

$$y = I(I^{-1}(y)) \stackrel{(2.21)}{=} I\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k\right) \stackrel{I \text{ stetig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k I(x_k),$$

woraus wir die Darstellungseigenschaft von $(I(x_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ erhalten. Ist nun

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k I(x_k) = 0 \in Y, \quad (2.22)$$

so folgt aus der Stetigkeit von I^{-1} , dass

$$X \ni 0 = I^{-1}(0) \stackrel{(2.22)}{=} I^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k I(x_k)\right) \stackrel{I^{-1} \text{ stetig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k x_k.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ folgt daraus $\nu_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und wir haben auch die Eindeutigkeit der Darstellung von $(I(x_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ gezeigt. Die Folge $(I(x_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist damit eine Basis von Y . \square

Mit diesen beiden Sätzen sind wir nun in der Lage, die Stabilitätseigenschaft von Schauderbasisen in Banachräumen zu beweisen.

Satz 2.21 (Stabilitätssatz). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit Schauderbasis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und Basiskonstante $K > 0$ (siehe Satz 2.10). Ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset X$ eine Folge mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_k - y_k\|}{\|x_k\|} < \frac{1}{2K},$$

dann ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ebenfalls eine Schauderbasis von X .

Beweis. Sei zunächst $\|x_k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, dass ein Isomorphismus $I : X \rightarrow X$ existiert mit $I(x_k) = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz 2.20 folgt daraus, dass die Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X ist. Mit der Vollständigkeit von X und Satz 2.10 ist dies auch eine Schauderbasis und es folgt die Behauptung.

Wir stellen zunächst fest, dass die Operatornorm des k -ten Koordinatenfunktional c_k unabhängig von $k \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist. Für alle $x \in X$ ist

$$\|c_k(x)\|_{\|x_k\|=1} = \|c_k(x)x_k\| = \|P_k(x) - P_{k-1}(x)\| \stackrel{\text{Satz 2.10}}{\leq} 2K\|x\| \quad (2.23)$$

(mit $P_{-1} := 0$) und folglich erhalten wir

$$\|c_k\| \leq 2K \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$S : X \rightarrow X \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)(x_k - y_k)$$

und zeigen zunächst, dass diese wohldefiniert ist. Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k(x)(x_k - y_k)\| &\stackrel{(2.23)}{\leq} 2K \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k - y_k\| \|x\| \\ &\stackrel{\|x_k\|=1}{=} 2K \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_k - y_k\|}{\|x_k\|}}_{=: < \frac{1}{2K}, \text{ Vor.}} \|x\| < \|x\|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

weswegen die Reihe absolut konvergiert. Da X ein Banachraum ist, folgt daraus die Konvergenz der Reihe und somit die Wohldefiniertheit von S . Offensichtlich ist S linear und wegen

$$\|S(x)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k(x)(x_k - y_k)\| \stackrel{(2.24)}{<} \|x\|$$

auch stetig mit Operatornorm $\|S\| < 1$. Daher konvergiert die Neumann-Reihe (siehe zum Beispiel [14], Seite 56f), weswegen der lineare und stetige Operator $I := Id_X - S$ invertierbar ist. Mit dem Satz der stetigen Inversen, ist I^{-1} ebenfalls stetig und somit I ein Isomorphismus. Wegen

$$I(x_k) = Id_X(x_k) - S(x_k) = x_k - (x_k - y_k) = y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

ist I der gesuchte Isomorphismus.

Sei nun $\|x_k\| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Mit

$$x'_k := \frac{x_k}{\|x_k\|} \quad \text{und} \quad y'_k := \frac{y_k}{\|x_k\|}$$

und Proposition 2.19 folgt, dass die Folge von Einheitsvektoren $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X ist. Da X vollständig ist, ist dies auch eine Schauderbasis (siehe Satz 2.10). Man überlegt sich schnell, dass diese zudem die gleichen kanonischen Projektionen wie die ursprüngliche Schauderbasis $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und damit auch die gleiche Basiskonstante $K > 0$ besitzt. Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x'_k - y'_k\|}{\|x'_k\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_k - y_k\|}{\|x_k\|} \stackrel{\text{Vor.}}{<} \frac{1}{2K} \tag{2.25}$$

ist die Folge $(y'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach dem ersten Teil des Beweises eine Schauderbasis von X . Mit Proposition 2.19 bildet dann auch die Folge $(\|x_k\|y'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von X . Da X ein Banachraum ist und $\|x_k\|y'_k = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt die Behauptung. \square

2.6 Existenz polynomieller Schauderbasen

Wir wollen mit Hilfe der soeben bewiesenen Stabilitätseigenschaft von Schauderbasen zeigen, dass sowohl in $C[a, b]$ als auch in $C_p[a - \pi, a + \pi]$ „einfache“ Schauderbasen, in Form von algebraischen beziehungsweise trigonometrischen Polynomen, existieren.

Definition 2.22 (algebraische und trigonometrische Polynome).

- a) Eine Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *algebraisches Polynom*, falls sie die Form

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n_A} a_k x^k \quad \text{mit } n_A \in \mathbb{N}_0, \quad a_0, \dots, a_{n_A} \in \mathbb{K}$$

besitzt. Ist A ungleich der Nullfunktion, das heißt ist $n_A \neq 0$ oder $a_0 \neq 0$, so heißt n_A der *Grad von A* , in Zeichen $\deg(A)$. Ist A die Nullfunktion, so sei $\deg(A) := -\infty$. Weiter bezeichnen wir mit \mathfrak{A} die *Menge aller algebraischen Polynome* und mit \mathfrak{A}_n die *Menge aller algebraischen Polynome vom Grad höchstens n* .

b) Eine Funktion $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *trigonometrisches Polynom*, falls sie die Form

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n_T} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

mit $n_T \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_{n_T}, b_1, \dots, b_{n_T} \in \mathbb{K}$

besitzt. Es ist dabei zu beachten, dass die eventuell leere Summe gleich 0 sei. Ist T ungleich der Nullfunktion, das heißt ist $n_T \neq 0$ oder $a_0 \neq 0$, so heißt n_T der *Grad von T* , in Zeichen $\deg(T)$. Ist T die Nullfunktion, so sei $\deg(T) := -\infty$. Weiter bezeichnen wir mit \mathfrak{T} die *Menge aller trigonometrischen Polynome* und mit \mathfrak{T}_n die *Menge aller trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n* .

Um mit Hilfe von Satz 2.21 die Existenz von polynomiellen Schauderbasisen in $C[a, b]$ beziehungsweise $C_p[a - \pi, a + \pi]$ nachzuweisen, müssen wir zunächst zeigen, dass beide Räume eine beliebige Schauderbasis besitzen. Im nächsten Lemma und auch künftig ist dabei zu beachten, dass wir bei algebraischen beziehungsweise trigonometrischen Polynomen in Räumen mit eingeschränktem Definitionsgebiet auf das Hinschreiben der Einschränkung auf das jeweilige Definitionsgebiet verzichten, da sich diese stets aus dem Kontext erschließen lässt.

Proposition 2.23. a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ besitzt der Banachraum $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ eine Schauderbasis. Darüber hinaus ist die Abbildung

$$I_{a,b} : C[0, 1] \rightarrow C[a, b]$$

$$f \mapsto I_{a,b}(f) \text{ mit } I_{a,b}(f)(x) := f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

ein isometrischer Isomorphismus, welcher algebraische Polynome auf eben solche abbildet. Für alle algebraischen Polynome $A \in \mathfrak{A}$ ist $I_{a,b}$ zudem graderhaltend, das heißt es gilt:

$$\deg(A) = \deg(I_{a,b}(A)).$$

b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ besitzt der Banachraum $(C_p[a - \pi, a + \pi], \|\cdot\|_\infty)$ eine Schauderbasis. Darüber hinaus ist die Abbildung

$$I_a : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow C_p[a - \pi, a + \pi]$$

$$f \mapsto I_a(f) \text{ mit } I_a(f)(x) := f(x - a)$$

ein isometrischer Isomorphismus, welcher trigonometrische Polynome auf eben solche abbildet. Für alle trigonometrischen Polynome $T \in \mathfrak{T}$ ist I_a zudem graderhaltend, das heißt es gilt:

$$\deg(T) = \deg(I_a(T)).$$

Beweis. Zu a): Wir haben in Beispiel 2.5 bereits gezeigt, dass der Raum $C[0, 1]$ eine Basis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ besitzt. Angenommen, wir hätten bereits gezeigt, dass die Abbildung $I_{a,b}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ein Isomorphismus ist. Mit Satz 2.20 folgt, dass dann die Folge $(I_{a,b}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $C[a, b]$ ist. Wegen dessen Vollständigkeit (siehe

Satz 2.4) ist dies dann auch eine Schauderbasis (siehe Satz 2.10).

Offensichtlich ist $I_{a,b}$ linear. Per Definition der Normen ist $I_{a,b}$ zudem isometrisch und, da linear, insbesondere stetig und injektiv. Ist $g \in C[a, b]$, so ist die Funktion $f(x) := g(x(b-a) + a) \in C[0, 1]$ ein Urbild von g unter $I_{a,b}$. Folglich ist $I_{a,b}$ surjektiv und daher auch invertierbar. Die Inverse $I_{a,b}^{-1}$ ist ebenfalls isometrisch und, da linear, insbesondere stetig. Damit ist $I_{a,b}$ ein isometrischer Isomorphismus.

Nun zur Tatsache, dass $I_{a,b}$ algebraische Polynome auf algebraische Polynome gleichen Grades abbildet. Sei $A \in \mathfrak{A}$ ein algebraisches Polynom vom Grad $\deg(A) = n \in \mathbb{N}_0$. Mit der binomischen Formel gilt:

$$\begin{aligned} I_{a,b}(A)(x) &= I_{a,b} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) (x) \stackrel{I_{a,b} \text{ linear}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(b-a)^k} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j (-a)^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^n b_k x^k \\ &\text{mit } b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{K} \text{ geeignet und } b_n = \frac{a_n}{(b-a)^n} \neq 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $I_{a,b}(A)$ ein algebraisches Polynom vom Grad $\deg(I_{a,b}(A)) = n = \deg(A)$. Da das Nullpolynom unter dem Isomorphismus $I_{a,b}$ auf das Nullpolynom abgebildet wird, folgt insgesamt Teil a) des Satzes.

Zu b): Wir zeigen, dass $C_p[-\pi, \pi]$ eine Basis besitzt, woraus sich der Rest von Teil b) analog zu Teil a) ergibt. Man verwende jedoch dabei statt der binomischen Formel die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen.

Wir betrachten die Folge $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$C'_1 = I_{-\pi, \pi}(C_0), \quad C'_k = I_{-\pi, \pi}(C_k) \quad \text{für alle } k = 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

($I_{-\pi, \pi}$ Isomorphismus aus Teil a)), $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ Schauderbasis von $C[0, 1]$ aus Beispiel 2.5). Dies entspricht der klassischen Basis von $C[0, 1]$ aus Beispiel 2.5 skaliert auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ und ohne das Element mit Index 1. Da C_1 die einzige nicht 1-periodische Funktion aus $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C[0, 1]$ ist, folgt:

$$(C'_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_p[-\pi, \pi].$$

Dass die Folge $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ trotz des Herausnehmens eines Basiselements eine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist, liegt an der folgenden Beobachtung: Für alle $f \in C_p[-\pi, \pi] \subset C[-\pi, \pi]$ gilt

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) I_{-\pi, \pi}(C_k)(\pi) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_0(f) + c_1(f) \\ \text{und } f(-\pi) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) I_{-\pi, \pi}(C_k)(-\pi) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_0(f), \end{aligned}$$

da $(I_{-\pi, \pi}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C[-\pi, \pi]$ ist. Zusammen mit der 2π -Periodizität von f , folgt $c_1(f) = 0$ für alle $f \in C_p[-\pi, \pi]$. Folglich verliert die Folge

$(I_{-\pi,\pi}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch das Herausnehmen des Basiselements $I_{-\pi,\pi}(C_1)$ nicht die Darstellungseigenschaft im Raum $C_p[-\pi, \pi]$.

Zur Eindeutigkeit der Darstellung sei

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k C'_k = \lambda_1 I_{-\pi,\pi}(C_0) + 0 \cdot I_{-\pi,\pi}(C_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k I_{-\pi,\pi}(C_k).$$

Da $(I_{-\pi,\pi}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C[-\pi, \pi]$ ist, folgt $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also wie behauptet eine Basis von $C_p[-\pi, \pi]$.

Setzen wir die Definition der klassischen Basis von Schauder aus Beispiel 2.5 in (2.26) ein, so ergibt sich die folgende Darstellung der Basis $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$C'_1(x) := 1, \\ C'_{2^l+m}(x) := \begin{cases} 2^l \left(\frac{x}{\pi} - \left(\frac{2m-2}{2^l} - 1 \right) \right) & \text{für } \frac{2m-2}{2^l} - 1 \leq \frac{x}{\pi} < \frac{2m-1}{2^l} - 1 \\ -2^l \left(\frac{x}{\pi} - \left(\frac{2m}{2^l} - 1 \right) \right) & \text{für } \frac{2m-1}{2^l} - 1 \leq \frac{x}{\pi} < \frac{2m}{2^l} - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.27) \\ \text{für alle } m = 1, \dots, 2^l; \quad l = 0, 1, \dots$$

□

Bemerkung 2.24. Proposition 2.23 a) zusammen mit Satz 2.20 zeigt, dass wir uns künftig bei Fragen der Existenz von algebraisch polynomiellen Schauderbasisen und bei der Betrachtung deren Grade im Raum $C[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ auf einen Raum $C[c, d]$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ beliebig zurückziehen können. Genauer ausgedrückt, liefert uns die Abbildung $I_{c,d}^{-1} \circ I_{a,b} : C[c, d] \rightarrow C[a, b]$ einen graderhaltenden isometrischen Isomorphismus zwischen den beiden Räumen.

Die analoge Aussage für den Raum $C_p[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ folgt aus Proposition 2.23 b) zusammen mit Satz 2.20.

Wir sind nun in der Lage zu zeigen, dass die Räume $C[a, b]$ und $C_p[a - \pi, a + \pi]$ Schauderbasisen bestehend aus Polynomen besitzen, für die wir sogar eine Zusatzeigenschaft verlangen können:

Satz 2.25. a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ besitzt der Banachraum $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ eine Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ bestehend aus algebraischen Polynomen, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet sind, das heißt es gilt

$$\deg(A_k) \leq \deg(A_{k+1}) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ besitzt der Banachraum $(C_p[a - \pi, a + \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ eine Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ bestehend aus trigonometrischen Polynomen, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet sind, das heißt es gilt

$$\deg(T_k) \leq \deg(T_{k+1}) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Zu a): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a = 0$ und $b = 1$ (vergleiche Bemerkung 2.24). In einem ersten Schritt folgt mit Hilfe des Approximationssatzes von Weierstraß im Raum $C[0, 1]$ (siehe den später bewiesenen Satz 3.3), dass die Menge der algebraischen Polynome \mathfrak{A} bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$ dicht in

$C[0, 1]$ liegt.

Aus Beispiel 2.5 oder Proposition 2.23 a) wissen wir, dass der Raum $C[0, 1]$ eine Schauderbasis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ besitzt. Da $\bar{\mathfrak{A}} = C[0, 1]$, finden wir für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ eine Folge $(A_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(k)} = C_k$. Wegen deren Konvergenz können wir für beliebiges $0 < q < 1$ schließen:

$$\forall k \geq 2 \quad \exists n(k) \in \mathbb{N}_0 : \|A_{n(k)}^{(k)} - C_k\|_\infty < \|C_k\|_\infty \frac{1}{2K} (1-q)q^{k-2} \quad (2.28)$$

mit $K > 0$ Basiskonstante der Schauderbasis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Setzen wir für eine vereinfachte Notation außerdem

$$A_{n(0)}^{(0)}(x) := C_0(x) = 1 \text{ und } A_{n(1)}^{(1)}(x) := C_1(x) = x \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2.29)$$

so können wir wegen der Vollständigkeit von $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ Satz 2.21 auf die Folge $(A_{n(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ anwenden. Wir erhalten damit aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_{n(k)}^{(k)} - C_k\|_\infty}{\|C_k\|_\infty} \stackrel{(2.28), (2.29)}{<} \frac{1}{2K} (1-q) \sum_{k=2}^{\infty} q^{k-2} \stackrel{0 < q < 1}{=} \frac{1}{2K},$$

dass die Folge $(A_{n(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ eine algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist.

Um eine algebraisch polynomielle Schauderbasis zu erhalten, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist, betrachten wir die Folge $(A'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C[0, 1]$, mit festem $0 < p < 1$ rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} A'_0(x) &:= A_{n(0)}^{(0)} \text{ und} \\ A'_k(x) &:= A_{n(k)}^{(k)}(x) + \|A_{n(k)}^{(k)}\|_\infty \frac{1}{2K'} (1-p) p^{k-1} x^{\deg(A'_{k-1})} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit $K' > 0$ Basiskonstante der Schauderbasis $(A_{n(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Offensichtlich ist $(A'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ und es gilt

$$\deg(A'_k) \leq \max \left\{ \deg(A'_k), \deg(A_{n(k+1)}^{(k+1)}) \right\} \stackrel{(2.30)}{=} \deg(A'_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.31)$$

Da $(A_{n(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$, wie oben gezeigt eine Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist, können wir wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_{n(k)}^{(k)} - A'_k\|_\infty}{\|A_{n(k)}^{(k)}\|_\infty} \stackrel{(2.30)}{<} \frac{1}{2K'} (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \underbrace{\| \cdot \|^{\deg(A'_{k-1})+1}}_{=1, \text{ da } x \in [0,1]} \stackrel{0 < p < 1}{=} \frac{1}{2K'}$$

Satz 2.21 anwenden und schließen, dass auch die Folge $(A'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ eine algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist. Zusammen mit (2.31) ist damit a) gezeigt.

Zu b): der Beweis folgt exakt dem Beispiel von Teil a). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei $a = 0$ annehmen (siehe Bemerkung 2.24). In einem ersten

Schritt folgt mit Hilfe des Approximationssatzes von Weierstraß im Raum $C_p[-\pi, \pi]$ (siehe den später bewiesenen Satz 3.10), dass die Menge der trigonometrischen Polynome \mathfrak{T} bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ dicht in $C_p[-\pi, \pi]$ liegt.

Aus Beispiel Proposition 2.23 b) wissen wir, dass der Raum $C_p[-\pi, \pi]$ eine Schauderbasis $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ besitzt. Da $\overline{\mathfrak{T}} = C_p[-\pi, \pi]$, finden wir für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(T_m^{(k)})_{m \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m^{(k)} = C'_k$. Wegen deren Konvergenz können wir für beliebiges $0 < r < 1$ schließen:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists m(k) \in \mathbb{N}_0 : \|T_{m(k)}^{(k)} - C'_k\|_\infty < \|C'_k\|_\infty \frac{1}{2K} (1-r)r^{k-1} \quad (2.32)$$

mit $K > 0$ Basiskonstante der Schauderbasis $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Setzen wir für eine vereinfachte Notation außerdem

$$T_{m(0)}^{(0)}(x) := C'_0(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2.33)$$

so können wir, da $(C_p[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, Satz 2.21 auf die Folge $(T_{m(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ anwenden. Wir erhalten damit aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T_{m(k)}^{(k)} - C'_k\|_\infty}{\|C'_k\|_\infty} \stackrel{(2.32), (2.33)}{<} \frac{1}{2K} (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \stackrel{0 < r < 1}{=} \frac{1}{2K},$$

dass die Folge $(T_{m(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist.

Um eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis zu erhalten, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist, betrachten wir die Folge $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C_p[-\pi, \pi]$, mit festem $0 < s < 1$ rekursiv definiert durch:

$$T'_0(x) := T_{m(0)}^{(0)} \quad \text{und} \quad (2.34)$$

$$T'_k(x) := T_{m(k)}^{(k)}(x) + \|T_{m(k)}^{(k)}\|_\infty \frac{1}{2K'} (1-s) s^{k-1} \sin(\deg(T'_{k-1})x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

mit $K' > 0$ Basiskonstante der Schauderbasis $(T_{m(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Offensichtlich ist $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ und es gilt

$$\deg(T'_k) \leq \max \left\{ \deg(T'_k), \deg(T_{m(k+1)}^{(k+1)}) \right\} \stackrel{(2.34)}{=} \deg(T'_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.35)$$

Da $(T_{m(k)}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$, wie oben gezeigt, eine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist, können wir wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T_{m(k)}^{(k)} - T'_k\|_\infty}{\|T_{m(k)}^{(k)}\|_\infty} \stackrel{(2.34)}{<} \frac{1}{2K'} (1-s) \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} \underbrace{\|\sin(\deg(T'_{k-1}) \cdot)\|_\infty}_{=1, \text{ da } x \in [-\pi, \pi]} \stackrel{0 < s < 1}{=} \frac{1}{2K'}$$

Satz 2.21 anwenden und schließen, dass auch die Folge $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist. Zusammen mit (2.35) ist damit auch b) gezeigt. \square

3 Konstruktion von polynomiellen Schauderbasen

Wir haben mit Satz 2.25 gezeigt, dass die Banachräume $C[a, b]$ und $C_p[a - \pi, a + \pi]$ jeweils eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete algebraisch beziehungsweise trigonometrisch polynomielle Schauderbasis besitzen. Für beide Räume wollen wir im folgenden Kapitel je eine konkrete polynomielle Schauderbasis mit aufsteigendem Grad konstruieren.

Die wesentliche Konstruktionsidee liegt darin, den Beweis von Satz 2.25 Schritt für Schritt zu verfolgen. Dazu benötigen wir jedoch konstruktive Beweise für die Approximationssätze von Weierstraß für die Räume $C[0, 1]$ und $C_p[-\pi, \pi]$. Wir beginnen mit dem algebraischen Fall.

3.1 Algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[0, 1]$

Repräsentativ für den algebraischen Fall betrachten wir den Raum $C[0, 1]$ (vergleiche Bemerkung 2.24). Wir wollen zunächst einen sehr elementaren Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß für den Raum $C[0, 1]$ führen. Dazu benötigen wir die folgenden Polynome:

Definition 3.1 (Bernstein-Polynome). Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C[0, 1]$ ist

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

das n -te Bernstein-Polynom von f . Dieses besitzt die folgenden Eigenschaften:

Proposition 3.2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist der Operator $B_n : C[0, 1] \rightarrow \mathfrak{A}_n$ linear und stetig. Darüber hinaus gilt:

$$|B_n(f)| \leq B_n(|f|) \quad \text{für alle } f \in C[0, 1], \quad (3.1)$$

$$B_n(f) < B_n(g) \quad \text{für alle } f, g \in C[0, 1] \text{ mit } f < g, \quad (3.2)$$

$$B_n(1)(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1], \quad (3.3)$$

$$B_n(\cdot^1)(x) = x \quad \text{für alle } x \in [0, 1], \text{ falls } n \geq 1, \quad (3.4)$$

$$B_n(\cdot^2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad \text{für alle } x \in [0, 1], \text{ falls } n \geq 2. \quad (3.5)$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. B_n ist offensichtlich wohldefiniert und linear. Per Definition

erhalten wir für $f \in C[0, 1]$

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(|f|)(x) \quad \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

und es folgt (3.1). Für $f, g \in C[0, 1]$ mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ folgt (3.2) aus

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{f < g}{<} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(g)(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Eigenschaft (3.3) ergibt sich mit dem Binomischen Satz aus

$$B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^n 1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Da B_n linear ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \|B_n(f)\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x \in [0, 1]} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(3.6)}{=} \|f\|_\infty \quad \forall f \in C[0, 1] \end{aligned}$$

auch die Stetigkeit von B_n . Sei nun $n \geq 1$. Gleichung (3.4) folgt per Definition aus

$$\begin{aligned} B_n(\cdot^1)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= x B_{n-1}(1)(x) \stackrel{(3.6)}{=} x \quad \forall x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.7)$$

so wie Gleichung (3.5) für $n \geq 2$ aus

$$\begin{aligned}
B_n(\cdot^2)(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{n-1}{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{1}{n} B_n(\cdot^1)(x) \\
&\stackrel{(3.7)}{=} \frac{n-1}{n} x^2 B_{n-2}(1)(x) + \frac{x}{n} \\
&\stackrel{(3.6)}{=} \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad \forall x \in [0, 1]
\end{aligned}$$

folgt. Dies beendet den Beweis. \square

Wir zeigen nun, dass das n -te Bernstein-Polynom $B_n(f)$ für alle $f \in C[0, 1]$ mit steigendem n gleichmäßig gegen f konvergiert und erhalten dadurch einen konstruktiven Beweis von:

Satz 3.3 (Approximationssatz von Weierstraß für $C[0, 1]$, K. Weierstraß, 1885). *Für alle $f \in C[0, 1]$ existiert eine Folge von algebraischen Polynomen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. [13], Seite 6. Sei $f \in C[0, 1]$. Wir wählen als Folge von algebraischen Polynomen die Bernstein-Polynome von f , $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ und zeigen, dass diese gleichmäßig gegen f konvergieren.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f auf dem Kompaktum $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist (Satz von Heine), existiert für alle $\lambda \in (0, 1)$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda) > 0$ mit

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \lambda \varepsilon \quad \forall x, y \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

Den Parameter $\lambda \in (0, 1)$ verwenden wir später, um eine Schauderbasis mit möglichst geringem Gradanstieg zu erhalten. Sei nun $\xi \in [0, 1]$ beliebig. Aus (3.8) folgt sofort $|f(x) - f(\xi)| \leq \lambda \varepsilon$ für alle $x \in [0, 1]$ mit $|x - \xi| \leq \delta$. Für alle $x \in [0, 1]$ mit $|x - \xi| > \delta$ erhalten wir mit $M := \|f\|_\infty < \infty$

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M < 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2$$

und es ergibt sich insgesamt

$$|f(x) - f(\xi)| < 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \lambda \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Wir wollen nun für $n \geq 2$ den Fehler des n -ten Bernstein-Polynoms von f an der Stelle ξ zu $f(\xi)$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(\xi) - f(\xi)| &\stackrel{(3.3)}{=} |B_n(f)(\xi) - B_n(1)(\xi)f(\xi)| \stackrel{\text{B}_n \text{ linear}}{=} |B_n(f(\cdot) - f(\xi))(\xi)| \\
&\stackrel{(3.1)}{\leq} B_n(|f(\cdot) - f(\xi)|)(\xi) \stackrel{(3.2), (3.9)}{<} B_n\left(2M\left(\frac{\cdot - \xi}{\delta}\right)^2 + \lambda\varepsilon\right)(\xi) \\
&\stackrel{\text{B}_n \text{ linear}}{=} \frac{2M}{\delta^2} B_n(\cdot^2)(\xi) - \frac{4M\xi}{\delta^2} B_n(\cdot)(\xi) + \left(\frac{2M\xi^2}{\delta^2} + \lambda\varepsilon\right) B_n(1)(\xi) \\
&\stackrel{(3.3), (3.4), (3.5)}{=} \frac{2M}{\delta^2} \left(\xi^2 + \frac{\xi(1-\xi)}{n}\right) - \frac{4M\xi}{\delta^2} \xi + \left(\frac{2M\xi^2}{\delta^2} + \lambda\varepsilon\right) \cdot 1 \\
&= \frac{2M}{\delta^2} \frac{\xi(1-\xi)}{n} + \lambda\varepsilon \leq \frac{M}{2\delta^2 n} + \lambda\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus der leicht zu zeigenden Tatsache $\max_{\xi \in [0,1]} \xi(1-\xi) = \frac{1}{4}$. Da wir $\xi \in [0,1]$ beliebig gewählt hatten, erhalten wir für alle $n \geq 2$:

$$\|B_n(f) - f\|_\infty < \frac{M}{2\delta^2 n} + \lambda\varepsilon. \quad (3.10)$$

Setzen wir nun

$$N := \max\left\{2, \frac{M}{2\delta^2(1-\lambda)\varepsilon}\right\} = \max\left\{2, \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2(1-\lambda)\varepsilon}\right\}, \quad (3.11)$$

so erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq N$:

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \stackrel{(3.10)}{<} \frac{M}{2\delta^2 n} + \lambda\varepsilon \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{M}{2\delta^2 N} + \lambda\varepsilon \stackrel{(3.11)}{\leq} (1-\lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon = \varepsilon. \quad (3.12)$$

Folglich konvergiert das n -te Bernstein-Polynom von f mit steigendem n gleichmäßig gegen f , was den Beweis beendet. \square

Bemerkung 3.4. Wir haben mit dem Beweis von Satz 3.3 auch gezeigt, dass für alle $f \in C[0,1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$$

gilt.

Wir sind nun in der Lage, eine konkrete algebraisch polynomielle Schauderbasis für $C[0,1]$ anzugeben, deren Grade aufsteigend angeordnet sind:

Satz 3.5. Sei $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die in Beispiel 2.5 vorgestellte Schauderbasis von $C[0,1]$, das heißt

$$\begin{aligned}
C_0(x) &:= 1, \quad C_1(x) := x, \\
C_{2^l+m}(x) &:= \begin{cases} 2^{l+1} \left(x - \frac{2m-2}{2^{l+1}}\right) & \text{für } \frac{2m-2}{2^{l+1}} \leq x < \frac{2m-1}{2^{l+1}} \\ -2^{l+1} \left(x - \frac{2m}{2^{l+1}}\right) & \text{für } \frac{2m-1}{2^{l+1}} \leq x < \frac{2m}{2^{l+1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\quad \text{für alle } m = 1, \dots, 2^l; \quad l = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Dann ist die Folge der Bernstein-Polynome $(B_{n(k)}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ mit

$$n(0) := 0, \quad n(1) := 1, \quad n(k) = 3^3 \cdot 2^{3k+2\lceil \log_2(k) \rceil - 2} \quad \text{für alle } k = 2, 3, \dots$$

eine algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[0, 1]$. Siehe auch Abbildung 3.1. Sie ist dem Grade nach aufsteigend angeordnet und es gilt $\deg(B_{n(k)}(C_k)) = n(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

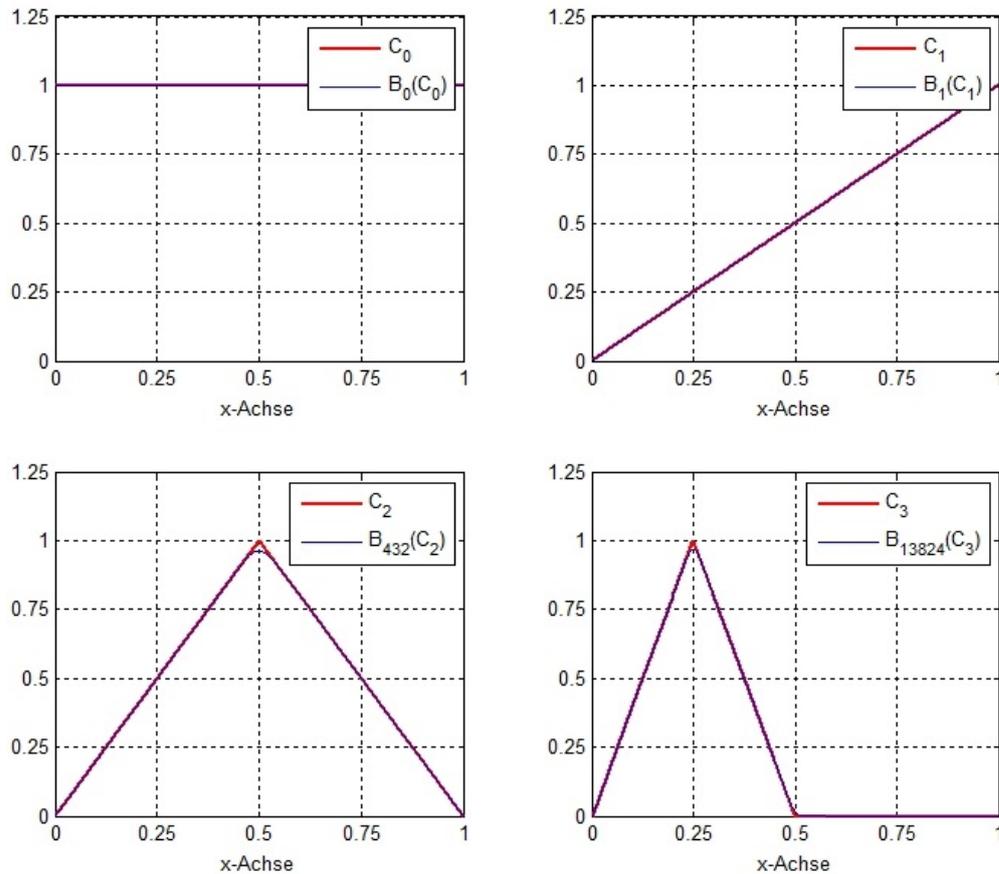


Abbildung 3.1: Die ersten vier Folgenglieder der konstruierten algebraisch polynomiellen Schauderbasis von $C[0, 1]$.

Beweis. Der Beweis folgt den Schritten des Beweises von Satz 2.25 a) und benötigt einige Resultate aus dem Beweis von Satz 3.3. Wir setzen daher voraus, dass diese dem Leser *bekannt* sind.

Zunächst zu den Fällen $k = 0$ und $k = 1$. In Übereinstimmung mit (2.29) ist

$$B_{n(0)}(C_0)(x) = B_0(1)(x) \stackrel{(3.3)}{=} 1 = C_0(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{und } B_{n(1)}(C_1)(x) = B_1(\cdot^1)(x) \stackrel{(3.4)}{=} x = C_1(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ ist zunächst festzuhalten, dass per Definition $\|C_k\|_\infty = 1$ gilt. Weiter haben wir in Beispiel 2.12 gezeigt, dass die Basiskonstante bezüglich $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $K = 1$ ist. Es reicht uns also zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ und beliebiges, aber festes $q \in (0, 1)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} \|B_{n(k)}(C_k) - C_k\|_\infty &< \|C_k\|_\infty \frac{1}{2K} (1-q)q^{k-2} \\ &= \frac{1}{2} (1-q)q^{k-2} =: \varepsilon(k) \end{aligned} \tag{3.13}$$

erfüllt ist und somit (2.28) gilt. Um (3.13) zu zeigen, müssen wir zunächst für beliebiges $\lambda \in (0, 1)$ ein $\delta(k) = \delta(\lambda, \varepsilon(k)) > 0$ bestimmen, sodass die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (3.8) für alle C_k erfüllt ist, also für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ und $x, y \in [0, 1]$ gilt:

$$|x - y| \leq \delta(k) \Rightarrow |C_k(x) - C_k(y)| \leq \lambda \varepsilon(k). \tag{3.14}$$

Wir setzen

$$\delta(k) := \frac{\lambda \varepsilon(k)}{2^{l+1}} \tag{3.15}$$

und zeigen, dass diese Wahl (3.14) erfüllt. Da

$$\delta(k) = \frac{\lambda \varepsilon(k)}{2^{l+1}} \stackrel{(3.13)}{=} \frac{1}{2^{l+1}} \underbrace{\lambda \frac{1}{2} (1-q)q^{k-2}}_{< 1, \forall q, \lambda \in (0, 1)} < \frac{1}{2^{l+1}}$$

gilt, impliziert die Bedingung $x, y \in [0, 1]$ mit $|x - y| \leq \delta(k)$ per Definition von $C_k(x)$, dass wir höchstens neun Fälle zu betrachten haben:

- Sei $x, y \in [\frac{2m-2}{2^{l+1}}, \frac{2m-1}{2^{l+1}}] =: I_1$ mit $|x - y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$|C_k(x) - C_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} 2^{l+1} |x - y| \leq 2^{l+1} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \geq 2.$$

Analog die Fälle $x, y \in [\frac{2m-1}{2^{l+1}}, \frac{2m}{2^{l+1}}] := I_2$ und $x, y \in (I_1 \cup I_2)^c =: I_3$.

- Sei $x \in I_1, y \in I_2$ mit $|x - y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$\begin{aligned} x &= \frac{2m-1}{2^{l+1}} - \delta_x \quad \text{mit } 0 \leq \delta_x \leq \delta(k) \quad \text{und} \\ y &= \frac{2m-1}{2^{l+1}} + \delta_y \quad \text{mit } 0 \leq \delta_y \leq \delta(k), \quad \delta_x + \delta_y \leq \delta(k) \end{aligned}$$

und daraus weiter

$$|C_k(x) - C_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} 2^{l+1} |\delta_x + \delta_y| \leq 2^{l+1} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \geq 2.$$

Analog der umgekehrte Fall $x \in I_2, y \in I_1$.

- Sei $x \in I_1, y \in I_3$ mit $|x - y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$x = \frac{2m-2}{2^{l+1}} + \delta_x \text{ mit } 0 \leq \delta_x \leq \delta(k)$$

und daraus weiter

$$|C_k(x) - C_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} |C_k(x)| = 2^{l+1} \delta_x \leq 2^{l+1} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \geq 2.$$

Analog der umgekehrte Fall $x \in I_3, y \in I_1$, sowie die Fälle $x \in I_2, y \in I_3$ und $x \in I_3, y \in I_2$.

Wir haben also gezeigt, dass mit $\delta(k)$ aus (3.15) die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (3.14) erfüllt ist.

Aus dem Beweis von Satz 3.3, Formel (3.11) wissen wir nun: Falls die Bedingung

$$\begin{aligned} n(k) \geq N(k) &:= \max \left\{ 2, \frac{\|C_k\|_\infty}{2\delta(k)^2(1-\lambda)\varepsilon(k)} \right\} \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \max \left\{ 2, \frac{2^{2l+2}}{2\lambda^2(1-\lambda)\varepsilon(k)^3} \right\} \quad \text{für alle } k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

erfüllt ist, so erhalten wir

$$\|B_{n(k)}(C_k) - C_k\|_\infty \stackrel{(3.12)}{<} \varepsilon(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \geq 2,$$

also die gewünschte Gleichung (3.13). Nach dem Beweis von Satz 2.25 a) erhalten wir damit eine ausreichend gute Approximation unserer Basis $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch die Bernstein-Polynome und haben gezeigt, dass auch die Folge $(B_{n(k)}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist.

Wir wollen nun $\lambda, q \in (0, 1)$ so bestimmen, dass $N(k)$ möglichst klein wird. Durch eine einfache Rechnung zeigt man, dass $\operatorname{argmax}_{\lambda \in (0,1)} \lambda^2(1-\lambda) = \frac{2}{3}$, weswegen wir $\lambda = \frac{2}{3}$ setzen und

$$N(k) \stackrel{(3.16)}{=} \max \left\{ 2, \frac{2^{2l+2}}{2\lambda^2(1-\lambda)\varepsilon(k)^3} \right\} \stackrel{(3.13)}{=} \max \left\{ 2, \frac{3^3 \cdot 2^{2l+1}}{((1-q)q^{k-2})^3} \right\} \quad (3.17)$$

erhalten. Da $\operatorname{argmax}_{q \in (0,1)} ((1-q)q^{k-2})^3 = 1 - \frac{1}{k-1} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) gilt, existiert für $q \in (0, 1)$

keine optimale Wahl und wir setzen $q = \frac{1}{2}$, um für $k = 2$ einen möglichst niedrigen Grad zu erhalten. Damit ergibt sich

$$N(k) \stackrel{(3.17)}{=} \max \left\{ 2, \frac{3^3 \cdot 2^{2l+1}}{((1-q)q^{k-2})^3} \right\} = \max \{ 2, 3^3 \cdot 2^{3k+2l-2} \} \stackrel{k \geq 2}{=} 3^3 \cdot 2^{3k+2l-2}.$$

Zusammen mit $\lceil \log_2(k) - 1 \rceil \stackrel{!}{=} l$ sieht man nun leicht, dass unsere Wahl $n(k) = 3^3 \cdot 2^{3k+2\lceil \log_2(k) - 1 \rceil - 2}$ die Bedingung (3.16) erfüllt, weswegen die Folge $(B_{n(k)}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ eine Schauderbasis von $C[0, 1]$ ist.

Aus der Definition von B_n ist leicht ersichtlich, dass für alle $f \in C[0, 1]$, $B_n(f)$ ein algebraisches Polynom vom Grad n ist und es folgt $\deg(B_{n(k)}(C_k)) = n(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da die Folge $n(k)$ in k offensichtlich streng monoton steigt, ist unsere Schauderbasis $(B_{n(k)}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ dem Grade nach aufsteigend angeordnet und es folgt die Behauptung. \square

Wir haben in Satz 3.5 eine konkrete Schauderbasis von $C[0, 1]$ konstruiert. Für die Grade der ersten sechs Folgenglieder gilt dabei:

$$\begin{aligned}
\deg(B_{n(0)}(C_0)) &= n(0) = 0, \\
\deg(B_{n(1)}(C_1)) &= n(1) = 1, \\
\deg(B_{n(2)}(C_2)) &= n(2) = 432, \\
\deg(B_{n(3)}(C_3)) &= n(3) = 13824, \\
\deg(B_{n(4)}(C_4)) &= n(4) = 110592, \\
\deg(B_{n(5)}(C_5)) &= n(5) = 3538944.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bemerkung 3.6. Implementiert man die gegebene Basisfolge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $C[0, 1]$ und die approximierende Folge der Bernstein-Polynome $(B_{n(k)}(C_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ in eine geeignete Mathematik Umgebung (beispielsweise Matlab) und beachtet man, dass der Fehler der Approximation des k -ten Basiselements C_k durch das $\tilde{n}(k)$ -te Bernstein-Polynom für alle $k \geq 2$ kleiner als $\varepsilon(k) = 2^{-k}$ sein muss (siehe Beweis von Satz 3.5, Formel (3.13) mit $q = \frac{1}{2}$), so ergibt sich durch sukzessives verkleinern von $\tilde{n}(k)$:

Die Bedingung $\|B_{\tilde{n}(k)}(C_k) - C_k\|_\infty < \varepsilon(k)$ ist für die ersten sechs k bereits für

$$\begin{aligned}
\tilde{n}(0) &= 0, \\
\tilde{n}(1) &= 1, \\
\tilde{n}(2) &= 10, \\
\tilde{n}(3) &= 120, \\
\tilde{n}(4) &= 476, \\
\tilde{n}(5) &= 4592,
\end{aligned}$$

erfüllt. Wir sehen also, dass die durch unsere Methode konstruierte algebraisch polynomielle Schauderbasis aus Satz 3.5 noch nicht scharf, im Sinne eines minimalen Gradanstiegs, ist.

Auch wenn noch etwas Spielraum nach unten ist, so wird es mit der von uns verwendeten Konstruktionsmethode nicht gelingen, eine Basis *ohne* exponentiellen Gradanstieg zu konstruieren. Siehe dazu auch Abbildung 3.2. Dies liegt daran, dass unsere Approximationschranke $\varepsilon(k)$ exponentiell schnell schrumpft, die Bernstein-Polynome aber selbst für sehr glatte Funktionen nur linear konvergieren (ohne Beweis).

Auf der anderen Seite können wir durch unsere Konstruktionsmethode für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jede beliebige vorgegebene Schranke $j(k) \in \mathbb{N}_0$ eine algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ konstruieren, deren Grade $\deg(A_k) \geq j(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllen. Wir müssen dazu lediglich das k -te Basiselement C_k durch das Bernstein-Polynom $B_{\max\{n(k), j(k)\}}(C_k)$ approximieren.

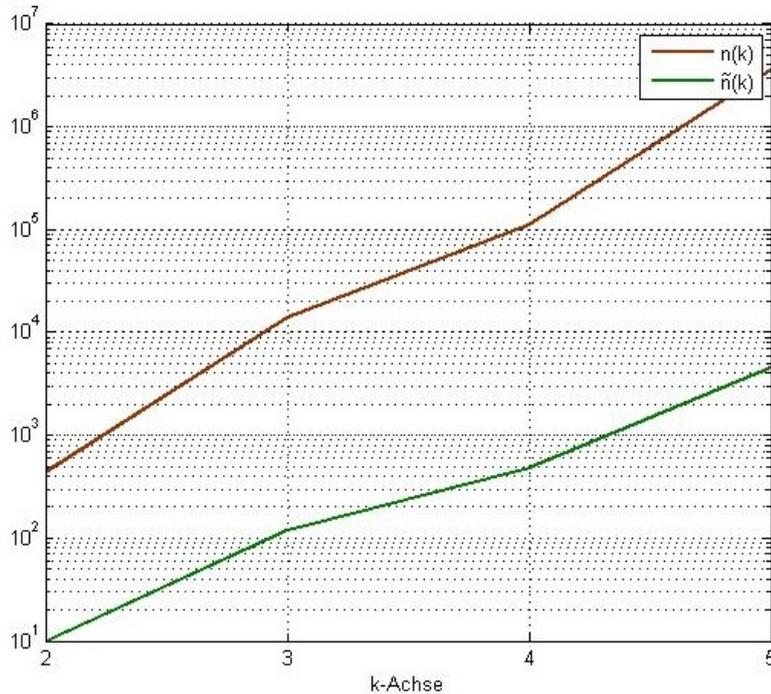


Abbildung 3.2: Logarithmischer Plot der Funktionen $n(k)$ und $\tilde{n}(k)$.

Bemerkung 3.7. Durch den Isomorphismus $I_{a,b} : C[0, 1] \rightarrow C[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) aus Proposition 2.23 a) erhalten wir aus der algebraisch polynomiellen Schauderbasis von $C[0, 1]$ aus Satz 3.5 umgehend eine konkrete algebraisch polynomielle Schauderbasis gleichen Grades für den Raum $C[a, b]$.

Nun zur Konstruktion einer dem Grade nach aufsteigend angeordneten trigonometrisch polynomiellen Schauderbasis von $C_p[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$.

3.2 Trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$

Repräsentativ für den trigonometrischen Fall betrachten wir den Raum $C_p[-\pi, \pi]$ (vergleiche Bemerkung 2.24). Wie im vorherigen Abschnitt führen wir zunächst einen sehr elementaren Beweis für den Approximationssatz von Weierstraß für den Raum $C_p[-\pi, \pi]$. Wir betrachten dazu die folgenden Operatoren:

Definition 3.8 (Fejér-Summen und -Kerne). Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $g \in C_p[-\pi, \pi]$ ist

$$\sigma_m(g) := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m s_k(g)$$

die m -te Fejér-Summe von g . Die Abbildung $F_m : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$F_m(x) := \begin{cases} \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin((m+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 & \text{falls } x \neq 0 \\ m+1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.19)$$

heißt m -ter Fejér-Kern. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

Satz 3.9. Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ist die m -te Fejér-Summe $\sigma_m : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_m$ (trigonometrische Polynome vom Grad $\leq m$) ein linearer und stetiger Operator mit

$$\|\sigma_m\| \leq 1. \quad (3.20)$$

Weiter ist der m -ten Fejér-Kern F_m stetig und besitzt die Eigenschaften

$$F_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \quad (3.21)$$

$$\text{sowie } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(u) \, du = 1. \quad (3.22)$$

Für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$ gilt zudem der folgende Zusammenhang zwischen Fejér-Summe und -Kern:

$$\sigma_m(g)(x) = \frac{1}{2\pi} (g * F_m)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-u) F_m(u) \, du \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.23)$$

Der Operator „*“ ist dabei der sogenannte Faltungsoperator.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Offensichtlich folgt Eigenschaft (3.21) direkt aus der Definition von F_m . Für die anderen Eigenschaften benötigen wir an dieser Stelle die aus der Analysis 1 bekannte Darstellung der Fourierreihe s_k zur Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ über den sogenannten k -ten Dirichlet-Kern D_k :

$$D_k(x) := 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx). \quad (3.24)$$

Es gilt $D_k \in C_p[-\pi, \pi]$ und man kann zeigen, dass sich der Dirichlet-Kern als

$$D_k(x) \stackrel{!}{=} \begin{cases} \frac{\sin((2k+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{falls } x \neq 0 \\ 2k+1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.25)$$

darstellen lässt. Weiter besitzt er für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$ die folgende Eigenschaft (siehe [2], Seite 42ff):

$$s_k(g)(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi} (g * D_k)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-u) D_k(u) \, du \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.26)$$

Daraus ergibt sich die Darstellung der m -ten Fejér-Summe σ_m als

$$\begin{aligned}\sigma_m(g) &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m s_k(g) \stackrel{(3.26)}{=} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{2\pi} (g * D_k) \\ &\stackrel{* \text{ bilinear}}{=} \frac{1}{2\pi} g * \underbrace{\left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m D_k \right)}_{=: G_m} = \frac{1}{2\pi} g * G_m \quad \forall g \in C_p[-\pi, \pi].\end{aligned}\quad (3.27)$$

Da $D_k \in C_p[-\pi, \pi] \forall k \in \mathbb{N}_0$ folgt per Definition $G_m \in C_p[-\pi, \pi]$. Wir zeigen nun $G_m \equiv F_m$, woraus $F_m \in C_p[-\pi, \pi]$ und zusammen mit (3.27) auch die Darstellung der m -ten Fejér-Summe (3.23) folgen.

Für $x = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}G_m(0) &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m D_k(0) \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m 2k+1 \\ &= \frac{1}{m+1} \left(2 \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \right) = m+1 \stackrel{\text{Def.}}{=} F_m(0).\end{aligned}$$

Ist $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, so folgt aus der Exponentialdarstellung des Sinus $\sin(x) \stackrel{!}{=} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^m z^k \stackrel{!}{=} \frac{1-z^{m+1}}{1-z}$:

$$\begin{aligned}G_m(x) &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m D_k(x) \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{\sin((2k+1)x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin(x/2)} \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^m e^{i(2k+1)x/2} - e^{-i(2k+1)x/2} \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin(x/2)} \frac{1}{2i} \left(e^{ix/2} \sum_{k=0}^m e^{ikx} - e^{-ix/2} \sum_{k=0}^m e^{-ikx} \right) \\ &\stackrel{e^{\pm ix} \neq 1}{=} \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin(x/2)} \frac{1}{2i} \left(e^{ix/2} \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} - e^{-ix/2} \frac{1 - e^{-i(m+1)x}}{1 - e^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin(x/2)} \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i(m+1)x} - 2 + e^{-i(m+1)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin(x/2)} \left(\frac{2i}{(2i)^2} \frac{(e^{i(m+1)x/2} - e^{-i(m+1)x/2})^2}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin((m+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \stackrel{\text{Def.}}{=} F_m(x).\end{aligned}$$

Wir haben also

$$F_m(x) = G_m(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad (3.28)$$

und damit insbesondere (3.23) gezeigt. Eigenschaft (3.22) erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(u) \, du &\stackrel{(3.28),(3.27)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) \, du \\
&\stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(ju) \right) \, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m (2\pi + 2 \cdot 0) = 1,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

wobei die leere Summe gleich 0 sei. Hieraus erhalten wir für beliebiges $g \in C_p[-\pi, \pi]$ und $x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
|\sigma_m(g)(x)| &\stackrel{(3.27),(3.28)}{=} \left| \frac{1}{2\pi} (g * F_m)(x) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x-u) F_m(u) \, du \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|g(x-u)|}_{\leq \|g\|_{\infty}} |F_m(u)| \, du \stackrel{F_m \geq 0}{\leq} \|g\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(u) \, du \\
&\stackrel{(3.29)}{=} \|g\|_{\infty}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

und wir erhalten

$$\|\sigma_m(g)\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_m(g)(x)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \|g\|_{\infty} \quad \forall g \in C_p[-\pi, \pi].$$

Es folgt $\|\sigma_m\| \leq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, was den Beweis beendet. \square

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Eigenschaften der Fejér-Summen, können wir zeigen, dass für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$ die m -te Fejér-Summe $\sigma_m(g)$ mit steigendem m gleichmäßig gegen g konvergiert und erhalten dadurch einen konstruktiven Beweis von:

Satz 3.10 (Approximationssatz von Weierstraß für $C_p[-\pi, \pi]$). *Für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$ existiert eine Folge von trigonometrischen Polynomen $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$, die gleichmäßig gegen g konvergiert.*

Beweis. [13], Seite 4f. Sei $g \in C_p[-\pi, \pi]$. Wir wählen als Folge von trigonometrischen Polynomen die Fejér-Summen von g , $(\sigma_m(g))_{m \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ und zeigen, dass diese gleichmäßig gegen g konvergieren.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g auf dem Kompaktum $[-\pi, \pi]$ auch gleichmäßig stetig ist (Satz von Heine), existiert für alle $\lambda \in (0, 1)$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda) > 0$ mit

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \lambda \varepsilon \quad \forall x, y \in [-\pi, \pi]. \tag{3.31}$$

Den Parameter $\lambda \in (0, 1)$ verwenden wir später, um eine Schauderbasis mit möglichst geringem Gradanstieg zu erhalten. Sei nun $x \in [-\pi, \pi]$ beliebig. Der Unterschied von

$g(x)$ zur m -ten Fejér-Summe von g an der Stelle x können wir durch

$$\begin{aligned}
& |\sigma_m(g)(x) - g(x)| \\
& \stackrel{(3.22), (3.23)}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-u) F_m(u) \, du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(u) \, du g(x) \right| \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-u) - g(x)| |F_m(u)| \, du \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq |u| < \delta} \underbrace{|g(x-u) - g(x)|}_{\leq \lambda\varepsilon, \text{ wegen (3.31)}} |F_m(u)| \, du \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \underbrace{|g(x-u) - g(x)|}_{\leq 2\|g\|_{\infty}} |F_m(u)| \, du \\
& \leq \lambda\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq |u| \leq \pi} |F_m(u)| \, du + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |F_m(u)| \, du \\
& \stackrel{(3.21)}{=} \lambda\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq |u| \leq \pi} F_m(u) \, du + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} F_m(u) \, du \tag{3.32} \\
& \stackrel{(3.22), \text{Def}}{=} \lambda\varepsilon + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin((m+1)u/2)}{\sin(u/2)} \right)^2 \, du \\
& \leq \lambda\varepsilon + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \frac{1}{m+1} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \left(\frac{1}{\sin(u/2)} \right)^2 \, du \\
& = \lambda\varepsilon + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \frac{2}{m+1} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin(u/2)} \right)^2 \, du \\
& \leq \lambda\varepsilon + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \frac{2}{m+1} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin(\delta/2)} \right)^2 \, du \\
& = \lambda\varepsilon + \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \frac{2}{m+1} \frac{\pi - \delta}{\sin(\delta/2)^2} \\
& < \lambda\varepsilon + \frac{2\|g\|_{\infty}}{m+1} \frac{1}{\sin(\delta/2)^2}
\end{aligned}$$

beschränken, wobei wir in der drittletzten Ungleichung verwendet haben, dass die Funktion $\sin(x/2)$ auf $[0, \pi]$ monoton steigend ist. Setzen wir nun

$$M := \frac{2\|g\|_{\infty}}{(1-\lambda)\varepsilon \sin(\delta/2)^2} - 1, \tag{3.33}$$

so erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq M$:

$$\begin{aligned} |\sigma_m(g)(x) - g(x)| &\stackrel{(3.32)}{<} \lambda\varepsilon + \frac{2\|g\|_\infty}{m+1} \frac{1}{\sin(\delta/2)^2} \\ &\stackrel{m \geq M}{\leq} \lambda\varepsilon + \frac{2\|g\|_\infty}{M+1} \frac{1}{\sin(\delta/2)^2} \stackrel{(3.33)}{=} \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da $x \in [-\pi, \pi]$ beliebig gewählt war, folgt

$$\|\sigma_m(g) - g\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_m(g)(x) - g(x)| \stackrel{(3.34)}{<} \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \geq M, \quad (3.35)$$

was der gleichmäßigen Konvergenz der Fejér-Summen von g gegen g entspricht. \square

Bemerkung 3.11. Wir haben mit dem Beweis von Satz 3.10 auch gezeigt, dass für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\sigma_m(g) - g\|_\infty = 0$$

gilt. Dies ist, wie wir in Bemerkung 2.18 gesehen haben, eine weit stärkere Aussage als wir sie für die Fourierentwicklung von g , $s_m(g)$ treffen können.

Satz 3.12. Sei $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die im Beweis von Satz 2.23 b), Formel (2.27) vorgestellte Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$, das heißt

$$\begin{aligned} C'_0(x) &:= 1, \\ C'_{2^l+m-1}(x) &:= \begin{cases} \frac{2^l}{\pi} (x - \pi (\frac{2m-2}{2^l} - 1)) & \text{für } \pi (\frac{2m-2}{2^l} - 1) \leq x < \pi (\frac{2m-1}{2^l} - 1) \\ -\frac{2^l}{\pi} (x - \pi (\frac{2m}{2^l} - 1)) & \text{für } \pi (\frac{2m-1}{2^l} - 1) \leq x < \pi (\frac{2m}{2^l} - 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &\quad \text{für alle } m = 1, \dots, 2^l; \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Dann ist die Folge der Fejér-Summen $(\sigma_{m(k)}(C'_k))_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ mit

$$m(0) := 0, \quad m(k) = 3 \cdot 2^{k+2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+\lceil \log_2(k+1) \rceil + 1}} \right)^{-2} \right] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$. Siehe dazu auch Abbildung 3.3. Sie ist dem Grade nach aufsteigend angeordnet und es gilt $\deg(\sigma_{m(k)}(C'_k)) = m(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Der Beweis folgt den Schritten des Beweises von Satz 2.25 b) und benötigt einige Resultate aus dem Beweis von Satz 3.10. Wir setzen daher voraus, dass diese dem Leser *bekannt* sind.

Zunächst zum Fall $k = 0$. In Übereinstimmung mit (2.33) ist

$$\sigma_{m(0)}(C'_0)(x) = \sigma_0(1)(x) = s_0(1)(x) = 1 = C'_0(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist zunächst festzuhalten, dass per Definition $\|C'_k\|_\infty = 1$ gilt. Weiter zeigt man analog zum Beweis in Beispiel 2.12, dass die Basiskonstante bezüglich

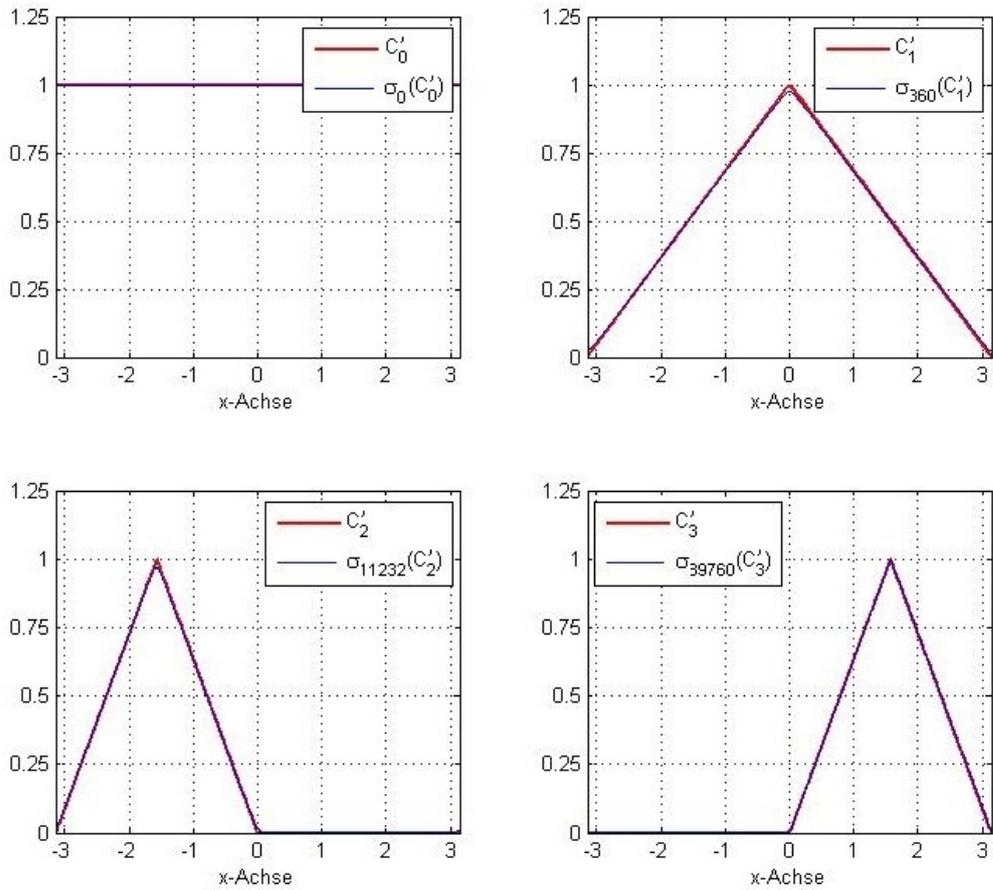


Abbildung 3.3: Die ersten vier Folgenglieder der konstruierten trigonometrisch polynomiellen Schauderbasis von $C[-\pi, \pi]$.

$(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $K = 1$ ist. Es reicht uns also zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und beliebiges, aber festes $r \in (0, 1)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} \|\sigma_{m(k)}(C'_k) - C'_k\|_\infty &< \|C'_k\|_\infty \frac{1}{2K} (1-r)r^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} (1-r)r^{k-1} =: \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (3.36)$$

erfüllt ist und somit (2.32) gilt. Um (3.36) zu zeigen, müssen wir zunächst für beliebiges $\lambda \in (0, 1)$ ein $\delta(k) = \delta(\lambda, \varepsilon(k)) > 0$ bestimmen, sodass die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (3.31) für alle C'_k erfüllt ist, also für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x, y \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$|x - y| \leq \delta(k) \Rightarrow |C'_k(x) - C'_k(y)| \leq \lambda \varepsilon(k). \quad (3.37)$$

Wir setzen

$$\delta(k) := \frac{\pi \lambda \varepsilon(k)}{2^l} \quad (3.38)$$

und zeigen, dass diese Wahl (3.37) erfüllt. Da

$$\delta(k) = \frac{\pi \lambda \varepsilon(k)}{2^l} \stackrel{(3.36)}{=} \frac{\pi}{2^l} \underbrace{\lambda \frac{1}{2} (1-r)r^{k-1}}_{<1, \forall r, \lambda \in (0,1)} < \frac{\pi}{2^l}$$

gilt, impliziert die Bedingung $x, y \in [-\pi, \pi]$ mit $|x-y| \leq \delta(k)$ per Definition von $C'_k(x)$, dass wir höchstens neun Fälle zu betrachten haben:

- Sei $x, y \in [\pi (\frac{2m-2}{2^l} - 1), \pi (\frac{2m-1}{2^l} - 1)] =: I_1$ mit $|x-y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$|C'_k(x) - C'_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{2^l}{\pi} |x-y| \leq \frac{2^l}{\pi} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog die Fälle $x, y \in [\pi (\frac{2m-1}{2^l} - 1), \pi (\frac{2m}{2^l} - 1)] =: I_2$ und $x, y \in (I_1 \cup I_2)^c =: I_3$.

- Sei $x \in I_1, y \in I_2$ mit $|x-y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$\begin{aligned} x &= \pi \left(\frac{2m-1}{2^l} - 1 \right) - \delta_x \text{ mit } 0 \leq \delta_x \leq \delta(k) \text{ und} \\ y &= \pi \left(\frac{2m-1}{2^l} - 1 \right) + \delta_y \text{ mit } 0 \leq \delta_y \leq \delta(k), \delta_x + \delta_y \leq \delta(k) \end{aligned}$$

und daraus weiter

$$|C'_k(x) - C'_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{2^l}{\pi} |\delta_x + \delta_y| \leq \frac{2^l}{\pi} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog der umgekehrte Fall $x \in I_2, y \in I_1$.

- Sei $x \in I_1, y \in I_3$ mit $|x-y| \leq \delta(k)$. Es folgt

$$x = \pi \left(\frac{2m-2}{2^l} - 1 \right) + \delta_x \text{ mit } 0 \leq \delta_x \leq \delta(k)$$

und daraus weiter

$$|C'_k(x) - C'_k(y)| \stackrel{\text{Def.}}{=} |C'_k(x)| = \frac{2^l}{\pi} \delta_x \leq \frac{2^l}{\pi} \delta(k) = \lambda \varepsilon(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog der umgekehrte Fall $x \in I_3, y \in I_1$, sowie die Fälle $x \in I_2, y \in I_3$ und $x \in I_3, y \in I_2$.

Wir haben also insgesamt gezeigt, dass mit $\delta(k)$ aus (3.38) die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (3.37) erfüllt ist.

Aus dem Beweis von Satz 3.10, Formel (3.33) wissen wir nun: Falls die Bedingung

$$\begin{aligned} m(k) \geq M(k) &:= \frac{2 \|C'_k\|_\infty}{(1-\lambda)\varepsilon(k) \sin\left(\frac{\delta(k)}{2}\right)^2} - 1 \\ &\stackrel{(3.38)}{=} \frac{2}{(1-\lambda)\varepsilon(k) \sin\left(\frac{\pi \lambda \varepsilon(k)}{2^{l+1}}\right)^2} - 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.39}$$

erfüllt ist, so erhalten wir

$$\|\sigma_{m(k)}(C'_k) - C'_k\|_\infty \underset{(3.36)}{<} \varepsilon(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also die gewünschte Gleichung (3.36). Nach dem Beweis von Satz 2.25 b) erhalten wir damit eine ausreichend gute Approximation unserer Basis $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch die Fejér-Summen und haben gezeigt, dass auch die Folge $(\sigma_{m(k)}(C'_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist.

Wir wollen nun $\lambda, r \in (0, 1)$ so bestimmen, dass $M(k)$ möglichst klein wird. Da $\delta(k)$ mit steigendem k exponentiell schnell gegen Null konvergiert, ist die Approximierung des Sinus durch Kleinwinkelnäherung eine naheliegende Idee. Wir erhielten dadurch im Nenner von $M(k)$ eine Abhängigkeit von λ der Form $(1 - \lambda)\lambda^2$. Man zeigt nun durch eine einfache Rechnung, dass $\operatorname{argmax}_{\lambda \in (0,1)} \lambda^2(1 - \lambda) = \frac{2}{3}$ ist, weswegen wir $\lambda = \frac{2}{3}$ setzen

und

$$M(k) \underset{(3.39)}{=} \frac{6}{\varepsilon(k) \sin\left(\frac{\pi\varepsilon(k)}{3 \cdot 2^l}\right)^2} - 1 \underset{(3.36)}{=} \frac{12}{(1-r)r^{k-1} \sin\left(\frac{\pi(1-r)r^{k-1}}{3 \cdot 2^{l+1}}\right)^2} - 1 \quad (3.40)$$

erhalten. Argumentiert man wieder mit der Kleinwinkelnäherung des Sinus, so ergibt sich im Nenner von $M(k)$ eine Abhängigkeit von r der Form $((1-r)r^{k-1})^3$. Da aber $\operatorname{argmax}_{r \in (0,1)} ((1-r)r^{k-1})^3 = 1 - \frac{1}{k} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) gilt, gibt es für $r \in (0, 1)$ selbst mit

Kleinwinkelnäherung keine optimale Wahl und wir setzen $r = \frac{1}{2}$, um für „kleine“ k einen möglichst niedrigen Grad zu erhalten. Es ergibt sich

$$M(k) \underset{(3.40)}{=} 3 \cdot 2^{k+2} \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+l+1}}\right)^{-2} - 1.$$

Zusammen mit $\lceil \log_2(k+1) - 1 \rceil \stackrel{!}{=} l$ verifiziert man nun leicht, dass unsere Wahl $m(k) = 3 \cdot 2^{k+2} \left\lceil \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+\lceil \log_2(k+1) - 1 \rceil + 1}}\right)^{-2} \right\rceil$ die Bedingung (3.39), nämlich $m(k) \geq M(k)$, erfüllt und daher die Folge $(\sigma_{m(k)}(C'_k))_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ ist.

Mit Hilfe der Definition von σ_m überprüft man leicht, dass für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$, $\deg(\sigma_m(g)) = m$ gilt und es folgt $\deg(\sigma_{m(k)}(C'_k)) = m(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da die Folge $m(k)$ in k offensichtlich streng monoton steigt, ist unsere Schauderbasis $(\sigma_{m(k)}(C'_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ dem Grade nach aufsteigend angeordnet und es folgt die Behauptung. \square

Wir haben also eine konkrete Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ konstruiert. Für die Grade

der ersten acht Folgenglieder gilt dabei:

$$\begin{aligned}\deg(\sigma_{m(0)}(C'_0)) &= m(0) = 0, \\ \deg(\sigma_{m(1)}(C'_1)) &= m(1) = 360, \\ \deg(\sigma_{m(2)}(C'_2)) &= m(2) = 11232, \\ \deg(\sigma_{m(3)}(C'_3)) &= m(3) = 89760, \\ \deg(\sigma_{m(4)}(C'_4)) &= m(4) = 2868672, \\ \deg(\sigma_{m(5)}(C'_5)) &= m(5) = 22948608, \\ \deg(\sigma_{m(6)}(C'_6)) &= m(6) = 183603456, \\ \deg(\sigma_{m(7)}(C'_7)) &= m(7) = 1468703232.\end{aligned}$$

Bemerkung 3.13. Implementiert man die gegebene Basisfolge $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $C_p[-\pi, \pi]$ und die approximierende Folge der Fejér-Summen $(\sigma_{m(k)}(C'_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ in eine geeignete Mathematik Umgebung (beispielsweise Matlab) und beachtet man, dass der Fehler der Approximation des k -ten Basiselements C'_k durch die $\tilde{m}(k)$ -te Fejér-Summe für alle $k \in \mathbb{N}$ kleiner als $\varepsilon(k) = 2^{-(k+1)}$ sein muss (siehe Beweis von Satz 3.12, Formel (3.36) mit $r = \frac{1}{2}$), so ergibt sich durch sukzessives verkleinern von $\tilde{m}(k)$:

Die Bedingung $\|\sigma_{\tilde{m}(k)}(C'_k) - C'_k\|_\infty < \varepsilon(k)$ ist für die ersten acht k bereits für

$$\begin{aligned}\tilde{m}(0) &= 0, \\ \tilde{m}(1) &= 2, \\ \tilde{m}(2) &= 13, \\ \tilde{m}(3) &= 31, \\ \tilde{m}(4) &= 160, \\ \tilde{m}(5) &= 349, \\ \tilde{m}(6) &= 763, \\ \tilde{m}(7) &= 1843,\end{aligned}$$

erfüllt. Wir sehen also, dass die durch unsere Methode konstruierte trigonometrisch polynomielle Schauderbasis aus Satz 3.12 noch nicht scharf, im Sinne eines minimalen Gradanstiegs, ist.

Auch wenn noch etwas Spielraum nach unten ist, so wird es mit der von uns verwendeten Konstruktionsmethode nicht gelingen, eine Basis *ohne* exponentiellen Gradanstieg zu konstruieren. Siehe dazu auch Abbildung 3.4. Dies liegt daran, dass unsere Approximationschranke $\varepsilon(k)$ exponentiell schnell schrumpft, die Fejér-Summen aber selbst für sehr glatte Funktionen nur linear konvergieren (ohne Beweis).

Auf der anderen Seite können wir durch unsere Konstruktionsmethode für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jede beliebige vorgegebene Schranke $j(k) \in \mathbb{N}_0$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ konstruieren, deren Grade $\deg(T_k) \geq j(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllen. Wir müssen dazu lediglich das k -te Basiselement C'_k durch die Fejér-Summe $\sigma_{\max\{m(k), j(k)\}}(C'_k)$ approximieren.

Bemerkung 3.14. Durch den Isomorphismus $I_a : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow C[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ aus Proposition 2.23 b) erhalten wir aus der trigonometrisch polynomiellen

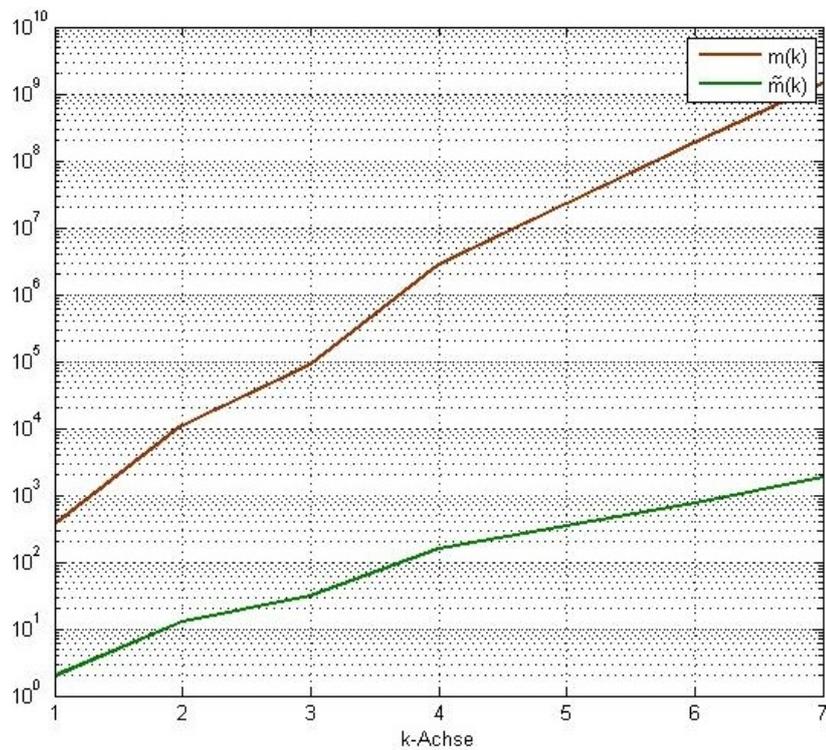


Abbildung 3.4: Logarithmischer Plot der Funktionen $m(k)$ und $\tilde{m}(k)$.

Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$ aus Satz 3.5 umgehend eine konkrete trigonometrisch polynomielle Schauderbasis gleichen Grades für den Raum $C[a - \pi, a + \pi]$.

Wir haben nun für die Räume $C[a, b]$ und $C_p[a - \pi, a + \pi]$ polynomielle Schauderbasen gesehen, die jeweils einen exponentiellen Gradanstieg besitzen. Man kann sich nun fragen, wie der Grad einer algebraisch beziehungsweise trigonometrisch polynomiellen Schauderbasis mindestens anwachsen muss? Auf diese Frage gibt das nächste Kapitel eine Antwort.

4 Notwendige Wachstumsbedingungen der Grade polynomieller Schauderbasis

Nachdem wir für die beiden Räume $C[a, b]$ und $C_p[a-\pi, a+\pi]$ jeweils eine Schauderbasis aus algebraischen beziehungsweise trigonometrischen Polynomen mit aufsteigendem Grad konstruiert haben, wollen wir uns mit dem folgenden Problem beschäftigen:

Wie groß ist der minimale Anstieg des Grades einer polynomiellen Schauderbasis?

Um darauf überhaupt die Chance einer Antwort zu haben, setzen wir stets voraus, dass die vorliegende Schauderbasis dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Wir haben in Satz 2.25 gezeigt, dass die beiden Banachräume $C[a, b]$ und $C_p[a, b]$ jeweils eine solche, dem Grade nach aufsteigend angeordnete, Schauderbasis besitzen.

Zur Lösung des Problems ist es sinnvoll, zunächst den trigonometrischen Fall zu betrachten, da der algebraische Fall darauf aufbaut.

4.1 Trigonometrisch polynomielle Schauderbasis

Im folgendem Abschnitt betrachten wir repräsentativ den Banachraum $(C_p[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ (vergleiche Bemerkung 2.24).

Proposition 4.1. *Sei $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\deg(T_k) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geq \frac{k}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.1)$$

Beweis. [7], Seite 162. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wie man leicht einsieht, ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge \mathfrak{T}_n (trigonometrische Polynome vom Grad kleiner gleich n) ein Untervektorraum von $C_p[-\pi, \pi]$ mit der Dimension

$$\dim(\mathfrak{T}_n) = 2n + 1. \quad (4.2)$$

Da die Menge $M_k := \{T_j \mid j = 0, \dots, k\}$ wegen Proposition 2.8 linear unabhängig ist und die T_k dem Grade nach aufsteigend angeordnet sind folgt, dass das lineare Erzeugnis von M_k , in Zeichen $\langle M_k \rangle$, ein Untervektorraum von $\mathfrak{T}_{\deg(T_k)}$ ist. Zusammen mit (4.2) ergibt sich

$$k + 1 = \dim(\langle M_k \rangle) \leq \dim(\mathfrak{T}_{\deg(T_k)}) \stackrel{(4.2)}{=} 2 \deg(T_k) + 1,$$

also $\deg(T_k) \geq \frac{k}{2}$. Da $\deg(T_k)$ ganzzahlig ist folgt daraus, die Behauptung. \square

Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, dass eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $C_p[-\pi, \pi]$ den Grad $\deg(T_k) \stackrel{!}{=} \lceil \frac{k}{2} \rceil$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ haben kann?

Wie wir in Beispiel 2.17 bereits gezeigt haben, ist die trivialste Wahl die diese Gradbedingung erfüllt, das trigonometrische System $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$T_0(x) := 1, \quad T_{2k-1}(x) := \cos(kx), \quad T_{2k}(x) := \sin(kx) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

keine Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$. Der folgende Satz zeigt nun, dass sich Beispiel 2.17 auch auf beliebige dem Grade nach aufsteigend angeordnete trigonometrisch polynomielle Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\deg(T_k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ausweiten lässt. Es handelt sich um den ersten Hauptsatz dieser Arbeit.

Hauptsatz 4.2 (G. Faber, 1914). *Sei $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0 : \deg(T_k) \begin{cases} \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \text{ oder } k \text{ ungerade} \\ > \lceil \frac{k}{2} \rceil & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.3)$$

Beweis. [5]. Sei $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$. Wir zeigen nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $\deg(T_{2n}) = n$, so ist die Operatornorm der $2n$ -ten kanonischen Projektion

$$\|P_{2n}\| > \frac{1}{2\pi} \log(4n). \quad (4.4)$$

Um daraus keinen Widerspruch zur gleichmäßigen Beschränktheit der Operatornormen durch die Basiskonstante $K > 0$ (vergleiche Satz 2.10) zu erhalten, kann die Annahme $\deg(T_{2n}) = n$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sein. Zusammen mit Proposition 4.1 ergibt sich daraus die Behauptung.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\deg(T_{2n}) = n$. Um (4.4) zu zeigen, betrachten wir die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \tau \in \mathbb{R}. \quad \cdot^\tau : C_p[-\pi, \pi] &\rightarrow C_p[-\pi, \pi] \\ g &\mapsto g^\tau \text{ mit } g^\tau(x) := g(x + \tau). \quad (\text{Translationsoperator}) \\ \text{Sei } \alpha \in \mathbb{R}. \quad Y_\alpha : C_p[-\pi, \pi] &\rightarrow C_p[-\pi, \pi] \\ g &\mapsto Y_\alpha(g) \text{ mit } Y_\alpha(g)(x) := P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Um zwei wohldefinierte Operatoren zu erhalten ist zu beachten, dass wir jeden Punkt $x \notin [-\pi, \pi]$ stets mit den kongruent eingepassten Punkt $x' \in [-\pi, \pi]$ identifizieren. Wir beweisen nun einige benötigte Eigenschaften des Operators Y_α :

- a) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi], \forall x \in [-\pi, \pi]$ ist die Abbildung $\alpha \mapsto Y_\alpha(g)(x) \in \mathbb{K}$ mit g, x fest stetig:

Sei $\alpha_k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ ($k \rightarrow \infty$). Da die stetige Funktion g auf dem Kompaktum $[-\pi, \pi]$ definiert ist, ist g nach dem Satz von Heine insbesondere gleichmäßig stetig. Folglich gilt

$$\|g^{\alpha_k} - g^\alpha\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (4.6)$$

woraus wir

$$\begin{aligned} |P_{2n}(g^{\alpha_k})(x - \alpha_k) - P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha_k)| &\leq \|P_{2n}(g^{\alpha_k}) - P_{2n}(g^\alpha)\|_\infty \\ &\leq \underbrace{\|P_{2n}\|}_{< \infty} \|g^{\alpha_k} - g^\alpha\|_\infty \xrightarrow{(4.6)} 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.7)$$

erhalten. Weiter ist zu bemerken, dass $P_{2n}(g^\alpha) \in C_p[-\pi, \pi]$ eine stetige Funktion ist und somit

$$|P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha_k) - P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (4.8)$$

gilt. Mit dem Folgenkriterium ergibt sich die gesuchte Stetigkeit schließlich aus

$$\begin{aligned} |Y_{\alpha_k}(g)(x) - Y_\alpha(g)(x)| &= |P_{2n}(g^{\alpha_k})(x - \alpha_k) - P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha)| \\ &\leq \underbrace{|P_{2n}(g^{\alpha_k})(x - \alpha_k) - P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha_k)|}_{\rightarrow 0, \text{ wegen (4.7)}} \\ &\quad + \underbrace{|P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha_k) - P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha)|}_{\rightarrow 0, \text{ wegen (4.8)}} \\ &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

- b) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi], \forall x \in [-\pi, \pi]$ ist die Abbildung $\alpha \mapsto Y_\alpha(g)(x) \in \mathbb{K}$ mit g, x fest 2π -periodisch. Da sowohl g als auch $P_{2n}(g)$ 2π -periodisch sind gilt:

$$Y_{\alpha+2\pi}(g)(x) = P_{2n}(g^{\alpha+2\pi})(x - \alpha - 2\pi) = P_{2n}(g^\alpha)(x - \alpha) = Y_\alpha(g)(x). \quad (4.9)$$

- c) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi]$ mit g zusätzlich τ -periodisch, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$Y_\alpha(g)(x - \tau) = P_{2n}(g^{\alpha+\tau-\tau})(x - (\alpha + \tau)) = Y_{\alpha+\tau}(g^{-\tau})(x) = Y_{\alpha+\tau}(g)(x). \quad (4.10)$$

- d) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi]$ mit g zusätzlich τ -periodisch ist die Abbildung $x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(g)(x) d\alpha \in \mathbb{K}$ ebenfalls τ -periodisch:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(g)(x - \tau) d\alpha &\stackrel{(4.10)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{\alpha+\tau}(g)(x) d\alpha \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{-\pi+\tau}^{\pi+\tau} Y_\alpha(g)(x) d\alpha \stackrel{\text{b)}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(g)(x) d\alpha. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für die letzte Gleichheit haben wir dabei benutzt, dass wir über eine ganze 2π -Periode integrieren.

- e) $\forall g \in \mathfrak{T}$ mit $\deg(g) = m \geq n$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(g)(x) d\alpha = s_n(g)(x). \quad (4.12)$$

Dies ist zum einen, da aufgrund der angenommenen Voraussetzung an den Grad von T_{2n} die Gleichung $P_{2n}(s_n(g)^\alpha)(x) = s_n(g)^\alpha(x)$ gilt. Somit ist die Funktion $\alpha \mapsto Y_\alpha(s_n(g))(x)$ konstant und es folgt $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(s_n(g))(x) d\alpha = s_n(g)(x)$.

Für alle Anteile an g mit Frequenz $\omega > n$ folgt aus der angenommenen Voraussetzung an den Grad von T_{2n} , dass die Funktion $x \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(c_\omega \cos(\omega \cdot) + d_\omega \sin(\omega \cdot))(x) d\alpha \in \mathbb{K}$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad n ist. Aus (4.11) wissen wir aber, dass das Resultat bezüglich x ebenfalls $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodisch ist. Es bleibt damit nur die Nullfunktion als Resultat übrig. Wäre dem nicht so, hätten wir eine Darstellung eines $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodischen trigonometrischen Polynoms mit Grad $\leq n < \omega$ gefunden. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Fourierentwicklung und wir haben somit (4.12) gezeigt.

Wir erinnern uns an dieser Stelle an die in Beispiel 2.17, Formel (2.20) definierte Funktion f . Sie ist ein Beispiel für ein trigonometrisches Polynom vom Grad $m > n$, welche die Norm $\|f\|_\infty \leq 1$ hat und dessen Fourierentwicklung $s_n(f)(0) > \frac{1}{2\pi} \log(4n)$ erfüllt. Setzen wir f in (4.12) ein und betrachten wir die Stelle $x = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(f)(0) d\alpha = s_n(f)(0) > \frac{1}{2\pi} \log(4n). \quad (4.13)$$

Da wir in a) gezeigt haben, dass die Abbildung $\alpha \mapsto Y_\alpha(f)(0)$ eine stetige Funktion ist, können wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\exists \alpha_0 \in [-\pi, \pi] : Y_{\alpha_0}(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_\alpha(f)(0) d\alpha \underset{(4.13)}{>} \frac{1}{2\pi} \log(4n) \quad (4.14)$$

folgern. Wegen $\|f^{\alpha_0}\|_\infty = \|f\|_\infty \leq 1$, ist f^{α_0} ein geeigneter Kandidat um (4.4) zu zeigen

$$\begin{aligned} \|P_{2n}\|_{\|f^{\alpha_0}\|_\infty \leq 1} &\geq \|P_{2n}(f^{\alpha_0})\|_\infty \underset{\alpha_0 \in [-\pi, \pi]}{\geq} |P_{2n}(f^{\alpha_0})(-\alpha_0)| = |Y_{\alpha_0}(f)(0)| \\ &\underset{(4.14)}{>} \frac{1}{2\pi} \log(4n), \end{aligned}$$

was den Beweis beendet. \square

Es stellt sich nun die Frage, wie sich der Grad der Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ab dem Index $k_0 \in \mathbb{N}_0$ genau verhält? Insbesondere ist aus dem Satz von Faber nicht ersichtlich, ob eine Aussage für alle hinreichen großen ungeraden $k \in \mathbb{N}_0$ getroffen werden kann? Im Gegensatz zum Hauptsatz 4.2, den G. Faber bereits 1914 beweisen konnte, hat dieses Problem die Mathematiker noch längere Zeit beschäftigt. Erst 1989 gelang es Al. A. Privalov das Problem endgültig zu lösen (siehe [9] und [10]). Er konnte 1987 zum einen zeigen, dass für jede dem Grade nach aufsteigend angeordnete Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ für $C_p[-\pi, \pi]$ die Bedingung

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(T_k) \geq (1 + \varepsilon) \frac{k}{2} \quad \forall k \geq k_0 \quad (4.15)$$

gelten muss. Zum anderen gelang es ihm, für alle $\varepsilon > 0$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete Schauderbasis $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ von $C_p[-\pi, \pi]$ mit

$$\deg(T'_k) \leq (1 + \varepsilon) \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

zu konstruieren. Wir wollen uns im folgenden mit der Notwendigkeit von (4.15) befassen. Dazu benötigen wir die folgenden Operatoren und ihre Eigenschaften:

Definition 4.3 (De la Vallée-Poussin Operatoren). Für $n \in \mathbb{N}$ und $g \in C_p[-\pi, \pi]$ ist der n -te de la Vallée-Poussin Operator V_n definiert durch

$$V_n(g) := 2\sigma_{2n-1}(g) - \sigma_{n-1}(g),$$

wobei $\sigma_m(g)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ die m -te Fejér-Summe von g aus Definition 3.8 ist.

Proposition 4.4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der n -te de la Vallée-Poussin Operator $V_n : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_{2n-1}$ (trigonometrische Polynome vom Grad $\leq 2n - 1$) ein linearer und stetiger Operator mit:

$$V_n(g) = g \quad \text{für alle } g \in \mathfrak{T}_n, \quad (4.16)$$

$$V_n(\cos(\omega \cdot)) = V_n(\sin(\omega \cdot)) = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \geq 2n, \quad (4.17)$$

$$\|V_n\| \leq 3. \quad (4.18)$$

Beweis. [2], Seite 30ff. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Wohldefiniertheit und Linearität von V_n folgen direkt aus den Definition von V_n und σ_n . Darüber hinaus gilt für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} V_n(g) &= 2\sigma_{2n-1}(g) - \sigma_{n-1}(g) \\ &= 2 \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} s_k(g) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(g) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(g). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ist nun $g \in \mathfrak{T}_n$, so ist $s_k(g) = g$ für alle $k \geq n$ und zusammen mit (4.19) folgt die erste Eigenschaft (4.16):

$$V_n(g) \stackrel{(4.19)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(g) \stackrel{(4.19)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} g = g.$$

Für Eigenschaft (4.17) ist zu bemerken, dass wegen der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung $s_k(\cos(\omega \cdot)) = 0 = s_k(\sin(\omega \cdot))$ für alle $k < \omega \in \mathbb{N}_0$ gilt. Folglich erhalten wir für alle $\omega \in \mathbb{N}$ mit $\omega \geq 2n$:

$$V_n(\cos(\omega \cdot)) \stackrel{(4.19)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(\cos(\omega \cdot)) \stackrel{\omega \geq 2n}{=} 0$$

$$\text{und } V_n(\sin(\omega \cdot)) \stackrel{(4.19)}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(\sin(\omega \cdot)) \stackrel{\omega \geq 2n}{=} 0.$$

Wir haben in Satz 3.9, Formel (3.20) gezeigt, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Operatornorm der m -ten Fejér-Summe $\|\sigma_m\| \leq 1$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar Eigenschaft (4.18):

$$\|V_n\| = \|2\sigma_{2n-1} - \sigma_{n-1}\| \leq 2 \underbrace{\|\sigma_{2n-1}\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|\sigma_{n-1}\|}_{\leq 1} \leq 3.$$

Wegen der Linearität von V_n impliziert dies insbesondere dessen Stetigkeit, was den Beweis beendet. \square

Proposition 4.5. *Sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim(Y) = n \in \mathbb{N}_0$. Ist X ein Untervektorraum von Y mit $\dim(X) = m \leq n$, so existieren $n - m$ lineare und stetige Funktionale $L_1, \dots, L_{n-m} \in Y^*$, sodass*

$$X = \{y \in Y \mid L_i(y) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n - m\}$$

Beweis. Für den Fall $m = n$ ist nichts zu zeigen.

Sei deshalb $m < n$. Da X selbst ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum ist besitzt er eine Hamelbasis. Es existieren also $x_1, \dots, x_m \in X$, sodass deren lineares Erzeugnis

$$\langle x_1, \dots, x_m \rangle = X$$

ist. Da auch Y endlich-dimensional ist, können wir die linear unabhängige Menge $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einer Hamelbasis von Y ergänzen, das heißt es existieren $y_1, \dots, y_{n-m} \in Y$ mit

$$Y = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m} \rangle.$$

Wir definieren unsere linearen Funktionale L_1, \dots, L_{n-m} nun durch

$$L_i(y_i) := 1 \text{ und } L_i|_{\langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n-m} \rangle} := 0 \quad \forall i = 1, \dots, n - m.$$

Wegen der Endlich-Dimensionalität von Y sind diese stetig. Ist nun $x \in X$, so folgt unmittelbar aus der Definition der Funktionale:

$$L_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n - m.$$

Sei nun $y \in Y$ mit $L_i(y) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n - m$. Mit der Hamelbasis von Y besitzt y die Darstellung

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_i y_i \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_{n-m} \in \mathbb{K} \text{ geeignet}$$

und wir erhalten aus der Linearität der Funktionale

$$0 = L_i(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n-m} \mu_i L_i(y_i) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n - m.$$

Damit besitzt y die Darstellung $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ und es folgt $y \in X$, also insgesamt die Behauptung. \square

Wir wollen mit Hilfe der Eigenschaften der de la Vallée-Poussin Operatoren die Richtigkeit des folgenden Lemmas zeigen. Dieses ist maßgeschneidert um im Anschluss die Notwendigkeit von (4.15) zu beweisen.

Lemma 4.6. *Es existiert ein $C > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle linearen und stetigen Operatoren $U : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_n$ gilt:
Existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und ein $(2m + 1)$ -dimensionaler Untervektorraum X_{2m+1} von \mathfrak{T}_n , sodass $U(g) = g$ für alle $g \in X_{2m+1}$, so genügt die Operatornorm von U der folgenden Ungleichung:*

$$\|U\| > C \log \left(\frac{n}{n-m} \right). \quad (4.20)$$

Beweis. [7], Seite 163f. Sei zunächst $n \geq 17$. Wir definieren $l := n - m > 0$ und betrachten den Fall, dass $m \geq \frac{15}{16}n$ ($\Leftrightarrow n \geq 16l$). Weiter sei $k := \lfloor \sqrt{\frac{n}{4l}} \rfloor \stackrel{!}{\geq} 2$ und $\mu := 4lk$.

Wir betrachten nun wieder die Funktion

$$\Psi(x) := \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2k+1}{2}|x|\right) \in C_p[-\pi, \pi]$$

aus Beispiel 2.17, Formeln (2.17) und (2.18). Es gilt $\|\Psi\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} s_{k-1}(\Psi)(0) &\stackrel{(2.18)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(2 \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - (2j)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2k+1+2j} + \frac{1}{2k+1-2j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^{2k} \frac{1}{2j-1} \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^{2k} \int_j^{j+1} \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_2^{2k+1} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2\pi} (\log(4k+1) - \log(3)) \\ &\stackrel{k \geq 2}{\geq} \frac{1}{2\pi} \frac{\log(9) - \log(3)}{\log(9)} \log(4k+1) > \underbrace{\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2}}_{=: C'} \log(2(k+1)) \\ &= C' \log(2(k+1)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wir definieren nun $f := \frac{1}{5} V_{k+3} (\Psi(\cdot) - a_k \cos(k\cdot) - \dots - a_{k+3} \cos((k+3)\cdot))$, wobei V_{k+3} der $(k+3)$ -te de la Vallée-Poussion Operator und a_k, \dots, a_{k+3} die Fourierkoeffizienten von Ψ sind. Wir erhalten damit eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- a) f ist ein gerades trigonometrisches Polynom vom Grad $2k+5$ und enthält keine Terme der Form $\cos(kx), \dots, \cos((k+3)x)$:

Da Ψ stückweise stetig differenzierbar ist konvergiert die Fourierentwicklung von

Ψ gleichmäßig und mit der Linearität, Stetigkeit und den restlichen Eigenschaften von V_{k+3} folgt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{5} V_{k+3} (\Psi(\cdot) - a_k \cos(k\cdot) - \dots - a_{k+3} \cos((k+3)\cdot)) (x) \\
&= \frac{1}{5} V_{k+3} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cos(j\cdot) + \sum_{j=k+4}^{\infty} a_j \cos(j\cdot) \right) (x) \\
&\stackrel{V_{k+3} \text{ stetig}}{=} \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j V_{k+3}(\cos(j\cdot))(x) + \sum_{j=k+4}^{\infty} a_j V_{k+3}(\cos(j\cdot))(x) \right) \\
&\stackrel{(4.16), (4.17)}{=} \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cos(jx) + \sum_{j=k+4}^{2(k+3)-1} a_j V_{k+3}(\cos(j\cdot))(x) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cos(jx) + \sum_{j=k+4}^{2k+5} a'_j \cos(jx) \right) \\
&\quad \text{mit } a'_{j+4}, \dots, a'_{2k+5} \in \mathbb{K} \text{ geeignet.}
\end{aligned}$$

b) Es ist $\|f\|_{\infty} \leq 1$:

Wir betrachten die Beträge der Fourierkoeffizienten a_k, \dots, a_{k+3} von Ψ , wobei wir in Beispiel 2.17 bereits $a_j \stackrel{(2.18)}{=} \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - (2j)^2}$ gezeigt haben.

Man zeigt leicht, dass der Betrag des k -ten Fourierkoeffizienten $|a_k| = \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{4k+1}$ in Abhängigkeit von k streng monoton fallend ist. Dieser ist daher beschränkt durch:

$$|a_k| = \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{4k+1} \stackrel{k \geq 2}{\leq} \frac{2}{\pi} \frac{4+1}{8+1} = \frac{10}{9\pi}.$$

Für die Beträge der Fourierkoeffizienten $|a_{k+1}|, |a_{k+2}|, |a_{k+3}|$ zeigt man schnell, dass diese in Abhängigkeit von k streng monoton steigend sind. Sie sind daher durch den jeweiligen Grenzwert $k \rightarrow \infty$ beschränkt. Es folgt

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}| &= \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{4k+3} \leq \frac{2}{\pi} \frac{2}{4} = \frac{1}{\pi}, \\
|a_{k+2}| &= \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{12k+15} \leq \frac{2}{\pi} \frac{2}{12} = \frac{1}{3\pi}, \\
|a_{k+3}| &= \frac{2}{\pi} \frac{2k+1}{20k+35} \leq \frac{2}{\pi} \frac{2}{20} = \frac{1}{5\pi}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit $\|\Psi\|_{\infty} = \frac{1}{2}$ erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty} &\leq \frac{1}{5} \|V_{k+3}\| (\|\Psi\|_{\infty} + |a_k| + \dots + |a_{k+3}|) \\
&\stackrel{(4.18)}{\leq} \frac{1}{5} 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{10}{9\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{5\pi} \right) \leq 1.
\end{aligned}$$

c) $s_{k-1}(f)(0) \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1}{5} s_{k-1}(\Psi)(0) \stackrel{\text{(4.21)}}{>} \frac{C'}{5} \log(2(k+1))$ mit $C' > 0$ feste Zahl.

Sei nun $c \in [-\pi, \pi]$. Wir definieren die Abbildungen

$$\varphi_1^c \in C_p[-\pi, \pi], \varphi_1^c(x) := s_{k-1}(f)(\mu(x-c))S(x), \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^c \in C_p[-\pi, \pi], \varphi_2^c(x) &:= (f - s_{k-1}(f))(\mu(x-c))S(x) \text{ und} \\ \varphi^c(x) &:= \varphi_1^c(x) + \varphi_2^c(x) = f(\mu(x-c))S(x), \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei $S \in \mathfrak{T}_{2lk} \setminus \{0\}$ so gewählt ist, dass $\varphi_1^c \in X_{2m+1}$ für alle $c \in [-\pi, \pi]$. Dass dies möglich ist, liegt an den folgenden Feststellungen:

Für $S \in \mathfrak{T}_{2lk}$ beliebig ist die höchst mögliche Frequenz von φ_1^c gleich $\mu(k-1) + 2lk < 4lk^2 = 4l \lfloor \sqrt{\frac{n}{4l}} \rfloor^2 \leq 4l \left(\sqrt{\frac{n}{4l}}\right)^2 = n$ und folglich ist $\varphi_1^c \in \mathfrak{T}_n$. Deshalb und da sich der Raum X_{2m+1} eindeutig als Nullstellenmenge von $2l$ linearen und stetigen Funktionalen $L_1, \dots, L_{2l} \in (\mathfrak{T}_n)^*$ charakterisieren lässt (siehe Proposition 4.5), ist die Bedingung $\varphi_1^c \in X_{2m+1}$ für alle $c \in [-\pi, \pi]$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned} L_i(S) = 0, \quad L_i(\cos(\omega \cdot)S(\cdot)) = 0, \quad L_i(\sin(\omega \cdot)S(\cdot)) = 0 \\ \text{für alle } i = 1, \dots, 2l; \quad \omega = \mu, 2\mu, \dots, (k-1)\mu. \end{aligned}$$

Dies entspricht $2l(2(k-1) + 1) = 2l(2k-1)$ linearen homogenen Gleichungen für die $4lk + 1$ Koeffizienten für $S \in \mathfrak{T}_{2lk}$. Wir haben also stets eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems, welches unser gesuchtes $S \in \mathfrak{T}_{2lk} \setminus \{0\}$ festlegt. Ohne Einschränkung können wir außerdem fordern, dass $\|S\|_\infty = 1$.

Da $\|\varphi^c\|_\infty \stackrel{\text{(4.23)}}{\leq} \|f\|_\infty \|S\|_\infty \stackrel{\text{b)}}{\leq} 1$ ist, werden wir ein geeignetes $c_0 \in [-\pi, \pi]$ konstruieren und zeigen, dass φ^{c_0} der richtige Kandidat ist, um (4.20) zu erhalten. Wir betrachten dazu ähnlich wie im Beweis von Fabers Satz 4.2 die Abbildung

$$\begin{aligned} h : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{K} \\ c &\mapsto h(c) := U(\varphi^c)(c) = U(\varphi_1^c)(c) + U(\varphi_2^c)(c), \end{aligned} \quad (4.24)$$

wobei U die lineare und stetige Abbildung aus den Voraussetzungen des Satzes ist. Wir wollen zunächst zeigen, dass h eine stetige Abbildung ist. Sei dazu $c_k \rightarrow c \in [-\pi, \pi]$ ($k \rightarrow \infty$), dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |h(c) - h(c_k)| &= |U(\varphi^c)(c) - U(\varphi^{c_k})(c_k)| \\ &\leq |U(\varphi^c)(c) - U(\varphi^c)(c_k)| + \|U(\varphi^c - \varphi^{c_k})\|_\infty \\ &\stackrel{\text{(4.23)}}{\leq} \underbrace{|U(\varphi^c)(c) - U(\varphi^c)(c_k)|}_{\rightarrow 0, \text{ da } U(\varphi^c) \text{ stetige Funktion}} \\ &\quad + \underbrace{\|U\|}_{< \infty} \underbrace{\|S\|_\infty}_{=1} \underbrace{\|f(\mu(\cdot - c)) - f(\mu(\cdot - c_k))\|_\infty}_{\rightarrow 0, \text{ da } f \text{ auf Kompaktum glm. stetig}} \\ &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

und haben mittels des Folgenkriteriums gezeigt, dass h eine stetige Abbildung ist.

Per Konstruktion gilt $\varphi_1^c \in X_{2m+1}$ und es folgt aus den Voraussetzungen, dass

$$U(\varphi_1^c)(c) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \varphi_1^c(c) \stackrel{\text{(4.22)}}{=} s_{k-1}(f)(0)S(c) \quad \text{für alle } c \in [-\pi, \pi] \quad (4.25)$$

gilt. Folglich ist $c \mapsto U(\varphi_1^c)(c) \in \mathfrak{T}_{2lk}$, da $S \in \mathfrak{T}_{2lk}$.

Da U nach \mathfrak{T}_n abbildet, können wir mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen zeigen, dass sich die Abbildung $x \rightarrow U(\varphi_2^c)(x)$ als

$$\begin{aligned}
U(\varphi_2^c)(x) &\stackrel{\text{Def. a)}}{=} U\left(\frac{1}{5} \sum_{j=k+4}^{2k+5} a'_j \cos(j\mu(\cdot - c))S(\cdot)\right)(x) \\
&\stackrel{U \text{ linear}}{=} \sum_{j=k+4}^{2k+5} \frac{1}{5} \left(\cos(j\mu c) \underbrace{a'_j U(\cos(j\mu \cdot)S(\cdot))}_{\in \mathfrak{T}_n}(x) \right. \\
&\quad \left. + \sin(j\mu c) \underbrace{a'_j U(\sin(j\mu \cdot)S(\cdot))}_{\in \mathfrak{T}_n}(x) \right) \\
&= \sum_{j=k+4}^{2k+5} (c_j(x) \cos(j\mu c) + d_j(x) \sin(j\mu c)) \quad \forall c \in [-\pi, \pi], \\
&\quad \text{mit } c_{k+4}, d_{k+4}, \dots, c_{2k+5}, d_{2k+5} \in \mathfrak{T}_n \text{ geeignet}
\end{aligned}$$

darstellen lässt. Es folgt, dass die Abbildung $c \rightarrow U(\varphi_2^c)(c)$ von der Form

$$\begin{aligned}
U(\varphi_2^c)(c) &= \sum_{j=k+4}^{2k+5} (c_j(c) \cos(j\mu c) + d_j(c) \sin(j\mu c)) \\
&= \sum_{j=|(k+4)\mu-n|}^{(2k+5)\mu+n} e_j \cos(jc) + f_j \sin(jc), \tag{4.26} \\
&\quad \text{mit } e_{|(k+4)\mu-n|}, f_{|(k+4)\mu-n|}, \dots, e_{(2k+5)\mu+n}, f_{(2k+5)\mu+n} \in \mathbb{K} \text{ geeignet}
\end{aligned}$$

ist. Die letzte Gleichheit überlegt man sich dabei aus den folgenden, aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen leicht zu zeigenden, Identitäten:

$$\begin{aligned}
\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\
\cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
\sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Da der niedrigsten Index von (4.26) wegen

$$\begin{aligned}
(k+4)\mu - n &= 4l(k^2 + 4k) - n \underset{k \geq 2}{\geq} 4l(k^2 + 2k + 1) - n = 4l(k+1)^2 - n \\
&\geq 4l \left(\sqrt{\frac{n}{4l}} \right)^2 - n = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

positiv ist folgt, dass die niedrigst mögliche Frequenz von $c \mapsto U(\varphi_2^c)(c)$ durch

$$\begin{aligned} |(k+4)\mu - n| &\stackrel{(4.28)}{=} (k+4)\mu - n = (k+4)4lk - n \underset{k \geq 2}{>} 4l(k+1)^2 - n + 4lk \\ &\geq 4l \left(\sqrt{\frac{n}{4l}} \right)^2 - n + 4lk = 4lk \end{aligned}$$

nach unten beschränkt ist.

Wir betrachten nun den $2lk$ -ten de la Vallée-Poussin Operator V_{2lk} . Mit der Stetigkeit von h ist $V_{2lk}(h)$ wohldefiniert und wir erhalten mit Proposition 4.4:

$$\begin{aligned} |V_{2lk}(h)(c)| &\stackrel{(4.24)}{=} |V_{2lk}(\underbrace{U(\varphi_1^c)(\cdot)}_{deg(\dots) \leq 2lk})(c) + V_{2lk}(\underbrace{U(\varphi_2^c)(\cdot)}_{deg(\dots) \geq 4lk})(c)| \\ &\stackrel{(4.16), (4.17)}{=} |U(\varphi_1^c)(c)| \stackrel{(4.25)}{=} |s_{k-1}(f)(0)S(c)| \quad (4.29) \\ &> \frac{C'}{5} \log(2(k+1))|S(c)| \quad \text{für alle } c \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$\|h\|_\infty \stackrel{(4.18)}{\geq} \frac{1}{3} \|V_{2lk}(h)\|_\infty \stackrel{(4.29)}{>} \frac{C'}{15} \log(2(k+1)) \underbrace{\|S\|_\infty}_{=1} = \frac{C'}{15} \log(2(k+1)) \quad (4.30)$$

und wir erhalten schließlich

$$\sup_{c \in [-\pi, \pi]} \|U(\varphi^c)\|_\infty \geq \sup_{c \in [-\pi, \pi]} |U(\varphi^c)(c)| = \|h\|_\infty \stackrel{(4.30)}{\geq} \frac{C'}{15} \log(2(k+1)). \quad (4.31)$$

Wir wollen nun den Satz über die Existenz eines Maximierers über kompakten Mengen benutzen. Es bleibt dazu zu zeigen, dass die Abbildung $c \mapsto \|U(\varphi^c)\|_\infty$ stetig ist. Sei dafür $c_k \rightarrow c \in [-\pi, \pi]$ ($k \rightarrow \infty$). Es gilt

$$\begin{aligned} | \|U(\varphi^c)\|_\infty - \|U(\varphi^{c_k})\|_\infty | &\leq \|U(\varphi^c) - U(\varphi^{c_k})\|_\infty \leq \|U\| \|\varphi^c - \varphi^{c_k}\|_\infty \\ &\stackrel{(4.23)}{\leq} \underbrace{\|U\|}_{< \infty} \underbrace{\|S\|_\infty}_{=1} \underbrace{\|f(\mu(\cdot - c)) - f(\mu(\cdot - c_k))\|_\infty}_{\rightarrow 0, \text{ da } f \text{ auf Kompaktum glm. stetig}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

und wir erhalten mit dem Folgenkriterium die gesuchte Stetigkeit. Wir können nun aus (4.31) folgern, dass

$$\begin{aligned} \exists c_0 \in [-\pi, \pi] : \|U(\varphi^{c_0})\|_\infty &= \sup_{c \in [-\pi, \pi]} \|U(\varphi^c)\|_\infty \stackrel{(4.31)}{>} \frac{C'}{15} \log(2(k+1)) \\ &\geq \frac{C'}{15} \log \left(2\sqrt{\frac{n}{4l}} \right) = \frac{C'}{30} \log \left(\frac{n}{n-m} \right) \end{aligned}$$

gilt. Mit $\|\varphi^{c_0}\|_\infty \leq 1$ folgt:

$$\|U\| \geq C \log \left(\frac{n}{n-m} \right),$$

wobei $C := \frac{C'}{30} = \frac{1}{30} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} = \frac{1}{120\pi} > 0$ eine von n, m, U und X_{2m+1} unabhängige feste Zahl ist.

Nun zu dem Fall, dass $\frac{15}{16}n > m \geq 0$. Da durch die Voraussetzungen des Satzes stets eine Funktion $g' \in X_{2m+1}$ mit $\|g'\|_\infty = 1$ und $U(g') = g'$ existiert, erhalten wir:

$$\|U\| = \sup_{g \in C_p, \|g\|_\infty = 1} \|U(g)\|_\infty \geq \sup_{\|g'\|_\infty = 1} \|U(g')\|_\infty = \|g'\|_\infty = 1. \quad (4.32)$$

Daraus erhalten wir die Behauptung für diesen Fall:

$$\|U\| \stackrel{(4.32)}{\geq} 1 > \frac{1}{120\pi} \log(16) = C' \log\left(\frac{n}{n - \frac{15}{16}n}\right) \stackrel{\frac{15}{16}n > m \geq 0}{>} C' \log\left(\frac{n}{n - m}\right).$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei unmittelbar aus der strengen Monotonie des Logarithmus. Wir haben damit die Behauptung für alle $n \geq 17$ gezeigt.

Sei nun $n < 17$. Wegen

$$U : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_n \leq \mathfrak{T}_{17}$$

und $X_{2m+1} \leq \mathfrak{T}_n \leq \mathfrak{T}_{17}$

können wir für diese n ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n = 17$ ist. Da wir diesen Fall bereits betrachtet haben, beendet dies den Beweis. \square

Es ist mit Hilfe von Lemma 4.6 nun ein leichtes, die Notwendigkeit der Privalov'schen Bedingung für den trigonometrischen Fall zu beweisen. Dies ist der zweite Hauptsatz dieser Masterarbeit.

Hauptsatz 4.7 (Al. A. Privalov, 1987). *Sei $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(T_k) \geq \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ (1 + \varepsilon) \frac{k}{2} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.33)$$

Beweis. [7], Seite 162. Aus Hauptsatz 4.2 folgt: Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $\deg(T_k) \geq \frac{k}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\deg(T_k) > \frac{k}{2}$ für alle geraden $k \geq k_0$. Es genügt also den Fall $k \geq k_0$ zu betrachten.

Für alle geraden $k = 2m \geq k_0$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ gilt mit dem Satz von Faber, dass $X_{2m+1} := \langle T_0, T_1, \dots, T_{2m} \rangle$ ein echter $(2m + 1)$ -dimensionaler und bezüglich P_{2m} invarianter Untervektorraum von $\mathfrak{T}_{\deg(T_{2m})}$ ist. Wir können daher Lemma 4.6 mit $n = \deg(T_{2m})$ und $U = P_{2m}$ ($2m$ -te kanonische Projektion) anwenden und erhalten:

$$\exists C > 0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 2m \geq k_0 : \|P_{2m}\| \geq C \log\left(\frac{\deg(T_{2m})}{\deg(T_{2m}) - m}\right). \quad (4.34)$$

Durch die gleichmäßige Beschränktheit der Projektionen durch die Basiskonstante $K > 0$ (vergleiche Satz 2.10) können wir daraus

$$K \geq \|P_{2m}\| \stackrel{(4.34)}{\geq} C \log\left(\frac{\deg(T_{2m})}{\deg(T_{2m}) - m}\right)$$

schließen, was zusammen mit $\varepsilon' := \frac{1}{e^{K/C} - 1} > 0$ äquivalent zu

$$\deg(T_{2m}) \geq \frac{e^{K/C}}{e^{K/C} - 1} m = (1 + \varepsilon') m \quad (4.35)$$

ist. Durch die Rücksubstitution $m = \frac{k}{2}$ folgt (4.33) für alle geraden k .

Für alle ungeraden $k \geq k_0$ wollen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass k_0 sowohl gerade ($\Rightarrow k > k_0$), als auch so groß ist, dass

$$k_0 > 1 + \frac{1}{\varepsilon'} \quad (4.36)$$

gilt. Dies können wir, falls nicht erfüllt, durch Vergrößern von k_0 stets erreichen. Da die Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist, erhalten wir mit $\varepsilon := \frac{k_0 \varepsilon' - \varepsilon' - 1}{k_0} > 0$:
(4.36)

$$\begin{aligned} \deg(T_k) \geq \deg(T_{k-1}) &\stackrel{(4.35)}{\geq} (1 + \varepsilon') \frac{k-1}{2} \stackrel{k > k_0}{>} (1 + \varepsilon') \frac{1}{2} \left(k - \frac{k}{k_0} \right) \\ &= (1 + \varepsilon') \left(1 - \frac{1}{k_0} \right) \frac{k}{2} = \left(1 + \frac{k_0 \varepsilon' - \varepsilon' - 1}{k_0} \right) \frac{k}{2} \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

was den Satz auch für ungerade k beweist. Zusammen mit $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ folgt insgesamt die Behauptung des Satzes. \square

Bemerkung 4.8. Die Aussage aus Hauptsatz 4.7 lässt sich durch den gradinvarianten Isomorphismus I_a aus Proposition 2.23 b) leicht auf alle dem Grade nach sortierten trigonometrisch polynomiellen Schauderbasis der Räume $C_p[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ verallgemeinern.

Bemerkung 4.9. Da der Grad eines trigonometrischen Polynoms stets eine ganze Zahl ist, erhält man aus Bemerkung 4.8 unmittelbar die folgende, leicht stärkere Aussage: Für jede trigonometrisch polynomielle Schauderbasis $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}$ von $C_p[a - \pi, a + \pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist gilt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(T_k) \geq \begin{cases} \lceil \frac{k}{2} \rceil & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ \lceil (1 + \varepsilon) \frac{k}{2} \rceil & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir wollen uns nun dem algebraischen Fall zuwenden.

4.2 Algebraisch polynomielle Schauderbasis

Wir wollen im Folgenden die Aussagen des vorherigen Abschnitts auf den Raum $C[a, b]$ mit einer dem Grade nach aufsteigend angeordneten algebraisch polynomiellen Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ übertragen. Repräsentativ betrachten wir den Fall $a = -1, b = 1$ (vergleiche Bemerkung 2.24).

Die wesentliche Beweisidee für den algebraischen Fall besteht darin, die Substitution $x = \cos(t)$ durchzuführen und eine analoge Aussage wie Hauptsatz 4.7 für gerade 2π -periodische Funktionen zu beweisen.

Definition/Proposition 4.10 ($C_p^g[-\pi, \pi]$). Der Raum der geraden 2π -periodischen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$, kurz

$$C_p^g[-\pi, \pi] := \{f \in C_p[-\pi, \pi] \mid f \text{ gerade, das heißt} \\ f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in [-\pi, \pi]\},$$

ist zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\cdot(x)|$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum.

Weiter bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}^g := \{T \in \mathfrak{T} \mid T(x) = T(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller geraden trigonometrischen Polynome und mit $\mathfrak{T}_n^g := \mathfrak{T}^g \cap \mathfrak{T}_n$ die Menge aller geraden trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n .

Beweis. Offensichtlich ist $C_p^g[-\pi, \pi]$ ein unendlich-dimensionaler Untervektorraum von $C_p[-\pi, \pi]$. Wir zeigen, dass dieser auch abgeschlossen ist.

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset C_p^g[-\pi, \pi]$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \in C_p[-\pi, \pi]$ und $x \in [-\pi, \pi]$ beliebig. Aus

$$0 \leq |f(x) - f(-x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(-x)| \\ =_{f_k \in C_p^g[a,b]} |f(x) - f_k(x)| + |f_k(-x) - f(-x)| \leq 2\|f - f_k\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

folgt, da x beliebig gewählt war, bereits $f \in C_p^g[-\pi, \pi]$. Damit ist $(C_p^g[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ als abgeschlossener Untervektorraum des Banachraumes $(C_p[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ (vergleiche Proposition 2.14) selbst ein Banachraum und es folgt die Behauptung. \square

Wir wollen nun zeigen, dass der algebraische Fall äquivalent zum Fall der geraden trigonometrischen Funktionen ist. Wie bereits erwähnt, besteht die wesentliche Idee darin, die Substitution $x = \cos(t)$ durchzuführen. Da aber der Kosinus auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ keine Bijektion ist, beschränken wir uns dabei auf den Raum $C[0, \pi]$. Wie das folgende Lemma zeigt, können wir diesen Raum mit dem Raum der geraden 2π -periodischen Funktionen identifizieren. Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass wir bei trigonometrischen und auch algebraischen Polynomen in Räumen mit eingeschränktem Definitionsgebiet auf das Hinschreiben der Einschränkung auf das jeweilige Definitionsgebiet verzichten, da sich diese stets aus dem Kontext erschließen lässt.

Lemma 4.11. *Es existiert ein isometrischer Isomorphismus $I_{sp \rightarrow p} : C[0, \pi] \rightarrow C_p^g[-\pi, \pi]$, der gerade trigonometrische Polynome auf eben solche abbildet. Ferner erfüllt dieser*

$$\deg(T) = \deg(I_{sp \rightarrow p}(T)) \text{ für alle } T \in \mathfrak{T}^g. \quad (4.37)$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$I_{sp \rightarrow p} : C[0, \pi] \rightarrow C_p^g[-\pi, \pi] \\ g \mapsto I_{sp \rightarrow p}(g) \text{ mit } I_{sp \rightarrow p}(g)(x) := g(|x|)$$

und zeigen, dass diese ein isometrischer Isomorphismus ist. Offensichtlich ist $I_{sp \rightarrow p}$ wohldefiniert und linear. Wegen

$$\|I_{sp \rightarrow p}(g)\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(|x|)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |g(x)| = \|g\|_\infty$$

ist $I_{sp \rightarrow p}$ isometrisch und damit insbesondere stetig und injektiv. Ist $f \in C_p^g[-\pi, \pi]$ gegeben, so ist $g := f|_{[0, \pi]}$ ein Urbild von f unter $I_{sp \rightarrow p}$ und wir haben insgesamt gezeigt, dass die Abbildung $I_{sp \rightarrow p}$ stetig und invertierbar ist. Die Inverse $I_{sp \rightarrow p}^{-1}$ ist ebenfalls isometrisch und damit insbesondere stetig. Damit ist die Abbildung $I_{sp \rightarrow p}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Sei nun $C[0, \pi] \cap \mathfrak{T}^g \ni T = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \cdot)$. Trivialerweise hat die gerade Fortsetzung $I_{sp \rightarrow p}(T)$, von dem auf dem Intervall $[0, \pi]$ definierten geraden trigonometrischen Polynom T , auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ die gleiche Darstellung wie T . Es folgt $I_{sp \rightarrow p}(T) \in \mathfrak{T}^g$ und $\deg(T) = \deg(I_{sp \rightarrow p}(T))$. Da dies ebenso für das Nullpolynom gilt, beendet dies den Beweis. \square

Wir wollen nun zeigen, dass die Eigenschaften der Grade algebraisch polynomieller Schauderbasen in $C[-1, 1]$ äquivalent sind zu den Eigenschaften der Grade gerader trigonometrisch polynomieller Schauderbasen in $C_p^g[-\pi, \pi]$. Dies bedeutet so viel wie:

Satz 4.12. *Es existiert ein isometrischer Isomorphismus $I_{a \rightarrow p} : C[-1, 1] \rightarrow C_p^g[-\pi, \pi]$, der algebraische Polynome auf gerade trigonometrische Polynome abbildet. Ferner erfüllt dieser*

$$\deg(A) = \deg(I_{a \rightarrow p}(A)) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}. \quad (4.38)$$

Beweis. [7], Seite 164. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$I_{a \rightarrow sp} : C[-1, 1] \rightarrow C[0, \pi] \\ f \mapsto I_{a \rightarrow sp}(f) \text{ mit } I_{a \rightarrow sp}(f)(x) := f(\cos(x))$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Die Abbildung $I_{a \rightarrow sp}$ ist offensichtlich wohldefiniert und linear. Sei nun $f \in C[-1, 1]$. Wegen

$$\|I_{a \rightarrow sp}(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(\underbrace{\cos(x)}_{\in [-1, 1]})| = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

ist $I_{a \rightarrow sp}$ isometrisch und da linear, insbesondere injektiv und stetig. Für die Surjektivität sei $g \in C[0, \pi]$. Da der Kosinus auf dem Definitionsgebiet $[0, \pi]$ invertierbar ist, erhalten wir durch $f(x) := g(\arccos(x))$ eine wohldefinierte und stetige Funktion. Diese ist wegen

$$I_{a \rightarrow sp}(f)(x) = f(\cos(x)) = g(\cos(\arccos(x))) = g(x)$$

ein Urbild von g unter $I_{a \rightarrow sp}$ und $I_{a \rightarrow sp}$ somit insgesamt stetig und invertierbar. Folglich existiert die Inverse $I_{a \rightarrow sp}^{-1}$, die ebenfalls isometrisch und insbesondere stetig ist. Wir haben also gezeigt, dass $I_{a \rightarrow sp}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Sei nun $\mathfrak{A} \ni A = \sum_{j=0}^n c_j x^j$ ein algebraisches Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$. Mit Hilfe der Exponentialdarstellung des Kosinus, dem binomischen Satz und der Symme-

trien von Sinus und Kosinus zeigt man, dass für alle $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \cos^j(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^j = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} e^{2k-j} \\ &= \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (\cos((2k-j)x) + i \sin((2k-j)x)) \\ &= \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \cos((2k-j)x) = \sum_{k=0}^j d_k \cos(kx) \\ &\quad \text{mit } d_0, \dots, d_{j-1} \in \mathbb{R} \text{ geeignet und } d_j = 2^{-j+1} \neq 0 \end{aligned}$$

ein trigonometrisches Polynom vom Grad j ist. Folglich ist

$$I_{a \rightarrow sp}(A)(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cos^j(x) = \underbrace{2^{-j+1} c_n}_{\neq 0, \text{ falls } n \in \mathbb{N}_0} \cos(nx) + \dots + p_1 \cos(x) + p_0$$

mit $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{K}$ geeignet

ein trigonometrisches Polynom vom Grad n , woraus

$$\deg(A) = \deg(I_{a \rightarrow sp}(A)) \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (4.39)$$

folgt. Man beachte, dass in Formel (4.39) links der Grad eines algebraischen und rechts der Grad eines trigonometrischen Polynoms steht.

Sei $(I_{sp \rightarrow p})$ der isometrische Isomorphismus aus Proposition 4.11. Dann ist die Abbildung

$$I_{a \rightarrow p} := I_{sp \rightarrow p} \circ I_{a \rightarrow sp}$$

als Komposition zweier isometrischer Isomorphismen selbst ein isometrischer Isomorphismus. Wegen

$$\begin{aligned} \deg(A) &\stackrel{(4.39)}{=} \deg(I_{a \rightarrow sp}(A)) = \\ &\stackrel{(4.37)}{=} \deg(I_{sp \rightarrow p} \circ I_{a \rightarrow sp}(A)) = \deg(I_{a \rightarrow p}(A)) \quad \forall A \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

ist $I_{a \rightarrow p}$ der behauptete isometrische Isomorphismus. □

Folgerung 4.13. *Der Banachraum $(C_p^g[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ besitzt eine gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasis $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}^g$ mit $\deg(T_k^g) \leq \deg(T_{k+1}^g)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Mit Satz 2.25 besitzt der Banachraum $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Aus Satz 2.20 folgt nun, dass mit dem Isomorphismus $I_{a \rightarrow p}$ aus Satz 4.12 die Folge $(I_{a \rightarrow p}(A_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $(C_p^g[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ ist. □

4.3 Gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasen

Wir haben mit Satz 4.12 zusammen mit Satz 2.20 gezeigt, dass es für die Analyse der Grade algebraisch polynomieller Schauderbasen in $C[-1, 1]$ ausreicht, die Grade gerader trigonometrisch polynomieller Schauderbasen in $C_p^g[-\pi, \pi]$ zu studieren. Dies werden wir nun in ähnliche Art und Weise wie für den Fall $C_p[-\pi, \pi]$ machen.

Proposition 4.14. *Sei $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}^g$ eine gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p^g[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\deg(T_k^g) \geq k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Da die Menge $M_k := \{T_0, \dots, T_k\}$ wegen Proposition 2.8 linear unabhängig und die Folge $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0}$ dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist, ist das lineare Erzeugnis von M_k , in Zeichen $\langle M_k \rangle$, ein Untervektorraum von $\mathfrak{T}_{\deg(T_k^g)}^g$. Offensichtlich gilt

$$k + 1 = \dim(\langle M_k \rangle) \leq \dim(\mathfrak{T}_{\deg(T_k^g)}^g) = \deg(T_k^g) + 1,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir beweisen nun den Satz von Faber für den Fall gerader 2π -periodischer Funktionen, welcher zugleich unser dritter Hauptsatz ist:

Hauptsatz 4.15 (G. Faber, 1914). *Sei $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}^g$ eine gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p^g[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0 : \deg(T_k^g) \begin{cases} \geq k & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ > k & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.40)$$

Beweis. [5]. Der Beweis verfolgt ähnliche Ideen und Schritte wie der Beweis des Hauptsatzes 4.2. Es ist jedoch nicht zwingend erforderlich, dass dieser dem Leser bekannt ist.

Sei $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}^g$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete gerade trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p^g[-\pi, \pi]$. Wir zeigen nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $\deg(T_n^g) = n$, so ist die Operatornorm der n -ten kanonischen Projektion

$$\|P_n\| > \frac{1}{4\pi} \log(4n). \quad (4.41)$$

Um daraus keinen Widerspruch zur gleichmäßigen Beschränktheit der Operatornormen durch die Basiskonstante $K > 0$ (vergleiche Satz 2.10) zu erhalten, kann die Annahme $\deg(T_n^g) = n$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sein. Zusammen mit Proposition 4.14 ergibt sich daraus die Behauptung.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\deg(T_n^g) = n$. Wir definieren uns die folgenden Operatoren:

$$\text{Sei } \alpha \in \mathbb{R}. h_\alpha : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow C_p^g[-\pi, \pi]$$

$$g \mapsto h_\alpha(g) \text{ mit } h_\alpha(g)(x) := \frac{g(\alpha + x) + g(\alpha - x)}{2}. \quad (4.42)$$

$$Z_\alpha : C_p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_n$$

$$g \mapsto Z_\alpha(g) \text{ mit } Z_\alpha(g)(x) := P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha). \quad (4.43)$$

Um zwei wohldefinierte Operatoren zu erhalten ist zu beachten, dass wir jeden Punkt $x \notin [-\pi, \pi]$ stets mit den kongruent eingepassten Punkt $x' \in [-\pi, \pi]$ identifizieren. Wir beweisen nun einige benötigte Eigenschaften der beiden Operatoren:

I) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi], \forall x \in [-\pi, \pi]$ ist die Abbildung $\alpha \mapsto Z_\alpha(g)(x) \in \mathbb{K}$ mit g, x fest stetig:

Sei $\alpha_k \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ ($k \rightarrow \infty$). Da die stetige Funktion g auf dem Kompaktum $[-\pi, \pi]$ insbesondere gleichmäßig stetig ist (Satz von Heine) gilt

$$\|g(\alpha_k + \cdot) - g(\alpha + \cdot)\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{und}$$

$$\|g(\alpha_k - \cdot) - g(\alpha - \cdot)\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (4.44)$$

und wir können

$$\begin{aligned} & |P_n(h_{\alpha_k}(g))(x - \alpha_k) - P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha_k)| \\ & \leq \|P_n(h_{\alpha_k}(g)) - P_n(h_\alpha(g))\|_\infty \leq \|P_n\| \|h_{\alpha_k}(g) - h_\alpha(g)\|_\infty \\ & \stackrel{(4.42)}{\leq} \underbrace{\|P_n\|}_{< \infty} \underbrace{\frac{\|g(\alpha_k + \cdot) - g(\alpha + \cdot)\|_\infty + \|g(\alpha_k - \cdot) - g(\alpha - \cdot)\|_\infty}{2}}_{\rightarrow 0, \text{ wegen (4.44)}} \\ & \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.45)$$

schließen. Da $P_n(h_\alpha(g)) \in \mathfrak{T}_n$ insbesondere eine stetige Funktion ist folgt

$$|P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha_k) - P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (4.46)$$

und wir erhalten die behauptete Stetigkeit aus

$$\begin{aligned} |Z_{\alpha_k}(g)(x) - Z_\alpha(g)(x)| &= |P_n(h_{\alpha_k}(g))(x - \alpha_k) - P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha)| \\ &\leq \underbrace{|P_n(h_{\alpha_k}(g))(x - \alpha_k) - P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha_k)|}_{\rightarrow 0, \text{ wegen (4.45)}} \\ &\quad + \underbrace{|P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha_k) - P_n(h_\alpha(g))(x - \alpha)|}_{\rightarrow 0, \text{ wegen (4.46)}} \\ &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

II) $\forall g \in C_p[-\pi, \pi], \forall k \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(g)(x - \alpha) d\alpha$,

$\frac{2\pi}{k}$ -periodisch:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(g)(x + \frac{2\pi}{k} - \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha - 2\pi) P_n(g)(x + \frac{2\pi}{k} - \alpha) d\alpha \\ & \stackrel{\text{Subst.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{2\pi}{k}}^{\pi - \frac{2\pi}{k}} \cos(k\alpha) P_n(g)(x - \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(g)(x - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit haben wir dabei benutzt, dass wir über eine ganze 2π -Periode integrieren.

III) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi]$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(\cos(k\cdot))(x - \alpha) d\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(kx) & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $k > n$ ist die linke Seite wegen II) $\frac{2\pi}{k}$ -periodisch in x . Da aber $P_n(\cos(k\cdot))(x)$ wegen der Voraussetzung $\deg(T_n^g) = n$ in x ein trigonometrisches Polynom vom Grad $n < k$ ist, bleibt einzig die Nullfunktion als Resultat. Denn wäre dem nicht so, hätten wir eine Darstellung eines $\frac{2\pi}{k}$ -periodischen trigonometrischen Polynoms mit Grad $\leq n < k$ gefunden. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Fourierreentwicklung.

Für $k \leq n$ ist wegen $\deg(T_n^g) = n$, $P_n(\cos(k\cdot))(x - \alpha) = \cos(k(x - \alpha))$ und es folgt mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(\cos(k\cdot))(x - \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) \cos(k(x - \alpha)) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k\alpha))^2 d\alpha}_{=\pi} + \sin(kx) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) \sin(k\alpha) d\alpha}_{=0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos(kx). \end{aligned}$$

IV) Für alle $g \in C_p[-\pi, \pi]$ gilt:

$$\|h_\alpha(g)\|_\infty \stackrel{(4.42)}{=} \frac{\|g(\alpha + \cdot) + g(\alpha - \cdot)\|_\infty}{2} \leq \frac{\|g\|_\infty + \|g\|_\infty}{2} = \|g\|_\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

V) Sei $g \in \mathfrak{T}^g$ mit $\deg(g) = m \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen besitzt $h_\alpha(g)$ die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} h_\alpha(g)(x) &= h_\alpha\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\cdot)\right)(x) \\ &\stackrel{(4.42)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \frac{\cos(k(\alpha+x)) + \cos(k(\alpha-x))}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\alpha) \cos(kx) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

VI) $\forall g \in \mathfrak{T}^g$ mit $\deg(g) = m \geq n$ und $\forall x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z_\alpha(g)(x) d\alpha &\stackrel{(4.43)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(h_\alpha(g))(x-\alpha) d\alpha \\ &\stackrel{\text{V), } P_n \text{ linear}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\alpha) P_n(\cos(k\cdot))(x-\alpha) d\alpha \\ &\stackrel{\text{III)}}{=} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} s_n(g)(x). \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an dieser Stelle an die in Beispiel 2.17, Formel (2.20) definierte Funktion f . Sie ist ein Beispiel für ein trigonometrisches Polynom vom Grad $m > n$, welche die Norm $\|f\|_\infty \leq 1$ hat und dessen Fourierentwicklung $s_n(f)(0) > \frac{1}{2\pi} \log(4n)$ erfüllt. f entspricht damit insbesondere den Voraussetzungen von VI) und wir erhalten an der Stelle $x = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z_\alpha(f)(0) d\alpha \stackrel{\text{VI)}}{=} \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} s_n(f)(0) \stackrel{a_0 > 0, (2.18)}{>} \frac{1}{2} s_n(f)(0) > \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \log(4n).$$

Da wir in I) gezeigt haben, dass die Abbildung unter dem Integral stetig ist, können wir mit dem Mittelwertsatz weiter folgern:

$$\exists \alpha_0 \in [-\pi, \pi] : Z_{\alpha_0}(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z_\alpha(f)(0) d\alpha > \frac{1}{4\pi} \log(4n). \quad (4.47)$$

Weiter ist $h_{\alpha_0}(f) \in \mathfrak{T}^g$ und wegen

$$\|h_{\alpha_0}(f)\|_\infty \stackrel{\text{IV)}}{\leq} \|f\|_\infty \leq 1 \quad (4.48)$$

ein geeigneter Kandidat um (4.41) zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|P_n\| &\stackrel{(4.48)}{\geq} \|P_n(h_{\alpha_0}(f))\|_\infty \geq P_n(h_{\alpha_0}(f))(-\alpha_0) \\ &\stackrel{(4.43)}{=} Z_{\alpha_0}(f)(0) \stackrel{(4.47)}{>} \frac{1}{4\pi} \log(4n), \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zum Beweis eines Lemmas, welches maßgeschneidert ist, um den Satz von Privalov für gerade 2π -periodische Funktionen zu beweisen. Ein wesentliches Hilfsmittel dazu sind wieder die de la Vallée-Poussin Operatoren und deren Eigenschaften (siehe Definition 4.3 und Proposition 4.4), sowie die Charakterisierung von Untervektorräumen von endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen (vergleiche Proposition 4.5).

Lemma 4.16. *Es existiert ein $D > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle linearen und stetigen Operatoren $U : C_p^g[-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{T}_n^g$ gilt:
Existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ und ein $(m+1)$ -dimensionaler Untervektorraum X_{m+1} von \mathfrak{T}_n^g , sodass $U(g) = g$ für alle $g \in X_{m+1}$, so genügt die Operatornorm von U der folgenden Ungleichung:*

$$\|U\| > D \log \left(\frac{n}{n-m} \right). \quad (4.49)$$

Beweis. Der Beweis folgt exakt Ideen und Schritten des Beweises von Lemma 4.6. Wir setzen daher voraus, dass dieser dem Leser *bekannt* ist. Wir betrachten in diesem Beweis nur den Fall $n \geq 17$ und $m \geq \frac{15}{16}n$, da die anderen Fälle analog wie im Beweis von Lemma 4.6 gezeigt werden.

Die Parameter l, k und μ seien wie im Beweis von Lemma 4.6 definiert und $f \in C_p^g[-\pi, \pi]$ sei wieder die Funktion mit den Eigenschaften a) - c). Wir definieren nun, im Unterschied zum Beweis von Lemma 4.6, für $c \in [-\pi, \pi]$ die Abbildungen

$$\vartheta_1^c(x) := \frac{s_{k-1}(f)(\mu(x-c)) + s_{k-1}(f)(\mu(-x-c))}{3} S(x) - \frac{s_{k-1}(f)(-\mu 2c)}{3} S(c), \quad (4.50)$$

$$\vartheta_2^c(x) := \frac{(f - s_{k-1}(f))(\mu(x-c)) + (f - s_{k-1}(f))(\mu(-x-c))}{3} S(x) - \frac{(f - s_{k-1}(f))(-\mu 2c)}{3} S(c),$$

$$\vartheta^c(x) := \vartheta_1^c(x) + \vartheta_2^c(x) = \frac{f(\mu(x-c)) + f(\mu(-x-c))}{3} S(x) - \frac{f(-\mu 2c)}{3} S(c), \quad (4.51)$$

wobei $S \in \mathfrak{T}_{2lk}^g \setminus \{0\}$ so gewählt ist, dass $\vartheta^c \in \mathfrak{T}^g$ und $\vartheta_1^c \in X_{m+1}$ für alle $c \in [-\pi, \pi]$. Dass eine solche Wahl möglich ist, liegt an den folgenden Feststellungen:

Ist $S \in \mathfrak{T}_{2lk}^g$ beliebig, so folgt per Definition $\vartheta_1^c, \vartheta_2^c, \vartheta^c \in \mathfrak{T}^g$. Die höchst mögliche Frequenz von ϑ_1^c ist $\mu(k-1) + 2kl < 4lk^2 = 4l \lfloor \sqrt{\frac{n}{4l}} \rfloor^2 \leq 4l \left(\sqrt{\frac{n}{4l}} \right)^2 = n$ und folglich ist $\varphi_1^c \in \mathfrak{T}_n \cap \mathfrak{T}^g = \mathfrak{T}_n^g$. Deshalb und da sich der Raum X_{m+1} eindeutig als Nullstellenmenge von l linearen und stetigen Funktionalen $L_1, \dots, L_l \in (\mathfrak{T}_n^g)^*$ charakterisieren lässt (siehe Proposition 4.5), ist die Bedingung $\varphi_1^c \in X_{m+1}$ für alle $c \in [-\pi, \pi]$ äquivalent zu:

$$L_i(1) = 0, \quad L_i(S) = 0, \quad L_i(\cos(\omega \cdot) S(\cdot)) = 0, \quad L_i(\sin(\omega \cdot) S(\cdot)) = 0$$

für alle $i = 1, \dots, l$; $\omega = \mu, 2\mu, \dots, (k-1)\mu$.

Dies entspricht $l(2(k-1)+2) = 2lk$ linearen homogenen Gleichungen für die $2lk+1$ Koeffizienten für $S \in \mathfrak{T}_{2lk}^g$. Wir haben also stets eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems, welches unser gesuchtes $S \in \mathfrak{T}_{2lk}^g \setminus \{0\}$ festlegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir fordern, dass $\|S\|_\infty = 1$.

Wir erhalten damit

$$\|\vartheta^c\|_\infty \stackrel{(4.51)}{\leq} \frac{\|f\|_\infty + \|f\|_\infty}{3} \|S\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{3} \|S\|_\infty = \|f\|_\infty \|S\|_\infty \stackrel{b)}{\leq} 1 \quad (4.52)$$

und betrachten erneut die Abbildung

$$\begin{aligned} h : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{K} \\ c &\mapsto h(c) := U(\vartheta^c)(c) = U(\vartheta_1^c)(c) + U(\vartheta_2^c)(c). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dabei ist U der lineare und stetige Operator aus den Voraussetzungen des Satzes und man zeigt analog zum Beweis von Lemma 4.6, dass h eine stetige Funktion ist.

Da per Konstruktion $\vartheta_1^c \in X_{m+1}$ ist, folgt aus den Voraussetzungen des Satzes

$$\begin{aligned} U(\vartheta_1^c)(c) &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \vartheta_1^c(c) \\ &\stackrel{(4.50)}{=} \frac{s_{k-1}(f)(0) + s_{k-1}(f)(-\mu 2c)}{3} S(c) - \frac{s_{k-1}(f)(-\mu 2c)}{3} S(c) \\ &= \frac{s_{k-1}(f)(0)}{3} S(c) \quad \forall c \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Folglich ist $c \mapsto U(\vartheta_1^c)(c) \in \mathfrak{T}_{2lk}^g$, da $S \in \mathfrak{T}_{2lk}^g$.

Da U nach \mathfrak{T}_n^g abbildet erhalten wir mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen, dass sich die Abbildung $x \rightarrow U(\vartheta_2^c)(x)$ als

$$\begin{aligned} U(\vartheta_2^c)(x) &\stackrel{\text{Def. a)}}{=} U\left(\frac{1}{5} \sum_{j=k+4}^{2k+5} a'_j \left(\frac{\cos(j\mu(\cdot - c)) + \cos(j\mu(-\cdot - c))}{3} S(\cdot) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos(j(-\mu 2c))}{3} S(c) \right)\right)(x) \\ &\stackrel{\text{U linear}}{=} \frac{1}{5} \sum_{j=k+4}^{2k+5} \cos(j\mu c) \underbrace{\frac{2}{3} a'_j U(\cos(j\mu \cdot) S(\cdot))}_{\in \mathfrak{T}_n^g}(x) \\ &\quad - \cos(j\mu 2c) \underbrace{\frac{1}{3} a'_j U(1)}_{\in \mathfrak{T}_{2lk}^g}(x) \\ &= \sum_{j=(k+4)\mu}^{(4k+10)\mu+2lk} (c_j(x) \cos(jc)) \quad \forall c \in [-\pi, \pi], \\ &\quad \text{mit } c_{k+4}, \dots, c_{2(2k+5)\mu+2lk} \in \mathfrak{T}_n^g \text{ geeignet} \end{aligned}$$

darstellen lässt. Für die letzte Gleichheit benötigt man dabei die Gleichungen (4.27) um

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+4}^{2k+5} \cos(j\mu 2c) \underbrace{S(c)}_{\in \mathfrak{S}_{2lk}^g} &= \sum_{j=|2(k+4)\mu-2lk|}^{2(2k+5)\mu+2lk} d_j \cos(jc) \\
&\stackrel{\text{Def. } \mu}{=} \sum_{j=(2k+\frac{15}{2})\mu}^{(4k+10)\mu+2lk} d_j \cos(jc) = \sum_{j=(k+4)\mu}^{(4k+10)\mu+2lk} d_j \cos(jc) \\
&\text{mit } d_{(k+4)\mu}, \dots, d_{(4k+10)\mu+2lk} \in \mathbb{K} \text{ geeignet}
\end{aligned}$$

zu zeigen. Es folgt nun analog zum Beweis von Lemma 4.6, dass die niedrigst mögliche Frequenz von $c \mapsto U(\vartheta_2^c)(c)$ durch

$$\begin{aligned}
(k+4)\mu - n &= (k+4)4lk - n \stackrel{k \geq 2}{\geq} 4l(k+1)^2 - n + 4lk \\
&\geq 4l \left(\sqrt{\frac{n}{4l}} \right)^2 - n + 4lk = 4lk
\end{aligned}$$

nach unten beschränkt ist.

Betrachten wir nun wieder den $2lk$ -ten de la Vallée-Poussin Operator V_{2lk} angewandt auf h , so erhalten wir zusammen mit Proposition 4.4

$$\begin{aligned}
|V_{2lk}(h)(c)| &\stackrel{(4.51)}{=} |V_{2lk}(\underbrace{U(\vartheta_1^c)(\cdot)}_{\deg(\dots) \leq 2lk})(c) + V_{2lk}(\underbrace{U(\vartheta_2^c)(\cdot)}_{\deg(\dots) \geq 4lk})(c)| \\
&\stackrel{(4.16), (4.17)}{=} |U(\vartheta_1^c)(c)| \stackrel{(4.54)}{=} \frac{|s_{k-1}(f)(0)|}{3} |S(c)| \\
&\stackrel{c)}{\geq} \frac{C'}{15} \log(2(k+1)) |S(c)| \quad \forall c \in [-\pi, \pi].
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Weiter gilt

$$\|h\|_\infty \stackrel{(4.18)}{\geq} \frac{1}{3} \|V_{2lk}(h)\|_\infty \stackrel{(4.55)}{\geq} \frac{C'}{45} \log(2(k+1)) \underbrace{\|S\|_\infty}_{=1} = \frac{C'}{45} \log(2(k+1)) \tag{4.56}$$

und es folgt schließlich

$$\sup_{c \in [-\pi, \pi]} \|U(\vartheta^c)\|_\infty \geq \sup_{c \in [-\pi, \pi]} |U(\vartheta^c)(c)| = \|h\|_\infty \stackrel{(4.56)}{\geq} \frac{C'}{45} \log(2(k+1)). \tag{4.57}$$

Man zeigt nun analog zum Beweis von Lemma 4.6, dass die Abbildung $c \mapsto \|U(\vartheta^c)\|_\infty$ stetig ist und wir können aus (4.57) weiter folgern:

$$\begin{aligned}
\exists c_0 \in [-\pi, \pi] : \|U(\vartheta^{c_0})\|_\infty &= \sup_{c \in [-\pi, \pi]} \|U(\vartheta^c)\|_\infty \stackrel{(4.57)}{\geq} \frac{C'}{45} \log(2(k+1)) \\
&\geq \frac{C'}{45} \log \left(2\sqrt{\frac{n}{4l}} \right) = \frac{C'}{90} \log \left(\frac{n}{n-m} \right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $\|\vartheta^{c_0}\|_\infty \leq 1$ haben wir also

$$\|U\| \geq D \log \left(\frac{n}{n-m} \right)$$

gezeigt, wobei $D := \frac{C'}{90} = \frac{1}{90} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} = \frac{1}{360\pi} > 0$ eine von n, m, U und X_{m+1} unabhängige feste Zahl ist. Dies beendet den Beweis. \square

Mit Hilfe von 4.16 ist es nun ein leichtes den Satz von Privalov für gerade Funktionen zu beweisen, welcher zugleich unser vierter Hauptsatz ist:

Hauptsatz 4.17 (Al. A. Privalov, 1987). *Sei $(T_k^g)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{T}^g$ eine trigonometrisch polynomielle Schauderbasis von $C_p^g[-\pi, \pi]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(T_k^g) \geq \begin{cases} k & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ (1 + \varepsilon)k & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.58)$$

Beweis. [7], Seite 162. Aus Hauptsatz 4.15 folgt: Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $\deg(T_k^g) \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\deg(T_k^g) > k$ für alle $k \geq k_0$. Es genügt also den Fall $k \geq k_0$ zu betrachten.

Für alle $k \geq k_0$ ist $X_{k+1} := \langle T_0^g, \dots, T_k^g \rangle$ ein echter $(k+1)$ -dimensionaler und bezüglich P_k invarianter Untervektorraum von $\mathfrak{T}_{\deg(T_k^g)}^g$. Wenden wir nun Lemma 4.16 mit $n = \deg(T_k^g)$, $m = k$ und $U = P_k$ (k -te kanonische Projektion) an, so erhalten wir:

$$\exists D > 0 : \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \geq k_0 : \|P_k\| \geq D \log \left(\frac{\deg(T_k^g)}{\deg(T_k^g) - k} \right). \quad (4.59)$$

Durch die gleichmäßige Beschränktheit der Projektionen durch die Basiskonstante $K > 0$ (siehe Satz 2.10) können wir weiter

$$K \geq \|P_k\| \stackrel{(4.59)}{\geq} D \log \left(\frac{\deg(T_k^g)}{\deg(T_k^g) - k} \right) \quad \forall k \geq k_0$$

schließen. Zusammen mit $\varepsilon := \frac{1}{e^{K/D} - 1} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$\deg(T_k^g) \geq \frac{e^{K/D}}{e^{K/D} - 1} k = (1 + \varepsilon)k \quad \forall k \geq k_0$$

was den Beweis beendet. \square

Der fünfte Hauptsatz dieser Arbeit ergibt sich nun fast wie von selbst:

Hauptsatz 4.18. *Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ eine algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[-1, 1]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist. Dann gilt:*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(A_k) \geq \begin{cases} k & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ (1 + \varepsilon)k & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Sei $I_{a \rightarrow p} : C[-1, 1] \rightarrow C_p^g[-\pi, \pi]$ der graderhaltende Isomorphismus aus Satz 4.12. Wegen (4.38) und Satz 2.20 ist die Folge $(I_{a \rightarrow p}(A_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine den Voraussetzungen von Hauptsatz 4.17 entsprechende Schauderbasis von $C_p^g[-\pi, \pi]$. Folglich existieren $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\deg(A_k) \stackrel{(4.38)}{=} \deg(I_{a \rightarrow p}(A_k)) \stackrel{(4.58)}{\geq} \begin{cases} k & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ (1 + \varepsilon)k & \text{sonst} \end{cases} .$$

□

Bemerkung 4.19. Die Aussage aus Hauptsatz 4.18 lässt sich mit Hilfe des Isomorphismuses $I_{a,b}$ aus Proposition 2.23 a) auf alle dem Grade nach sortierten algebraisch polynomiellen Schauderbasis der Räume $C[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ausweiten. Da zudem der Grad eines algebraischen Polynoms eine ganze Zahl ist, erhält man die folgende, leicht stärkere Aussage:

Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ eine dem Grade nach aufsteigend angeordnete algebraisch polynomielle Schauderbasis von $C[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gilt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}_0, \exists \varepsilon > 0 : \deg(A_k) \geq \begin{cases} k & \text{falls } 0 \leq k < k_0 \\ \lceil (1 + \varepsilon)k \rceil & \text{sonst} \end{cases} .$$

Bemerkung 4.20. Wir haben in Satz 3.5 eine algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $C[0, 1]$ konstruiert, dessen ersten Folgenglieder die Grade $0, 1, 432, 13824, \dots$ haben (vergleiche Formel (3.18)). Dies zeigt uns, dass in Hauptsatz 4.18 und Bemerkung 4.19 die Voraussetzung „es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ “ unerlässlich ist. Im Falle dieser Basis ist $k_0 = 2$.

5 Ausblick

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass für jede algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ von $C[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist, ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass

$$\deg(A_k) \geq (1 + \varepsilon)k \quad (5.1)$$

für alle hinreichend großen k gilt (siehe Hauptsatz 4.18). Die Frage ist nun, ob diese Aussage scharf, im Sinne einer Gradbeschränkung nach unten, ist?

Wir haben in diesem Zusammenhang bereits festgestellt, dass die Gradbeschränkung nach unten (5.1) tatsächlich erst für hinreichend große k gelten kann (vergleiche Bemerkung 4.20). Offen bleibt damit noch die Frage, ob das Gradwachstum wirklich linear von statten gehen kann und falls dem so ist, ob die Steigung $1 + \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ beliebig klein, optimal ist?

Die Antwort auf den ersten Teil der Frage lieferte S. V. Bochkarev im Jahre 1985: Er konstruierte eine algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ von $C[a, b]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist und für die $\deg(A_k) \leq 4k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt (siehe [1]). Bereits vier Jahre später, im Jahre 1989, konnte Al. A. Privalov, dem zusammen mit G. Faber die Beweise der Sätze aus dem vorherigen Kapitel zuzuschreiben sind, die Frage endgültig beantworten: Er konstruierte für alle $\varepsilon > 0$ eine algebraisch polynomielle Schauderbasis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathfrak{A}$ von $C[a, b]$, die dem Grade nach aufsteigend angeordnet ist und für die $\deg(A_k) \leq (1 + \varepsilon)k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt [10]. Eine solche Schauderbasis nennt man gradoptimal. Al. A. Privalovs Konstruktion der gradoptimalen Schauderbasis zeigt uns, dass die Privalov'sche Bedingung (5.1) aus Hauptsatz 4.18 unter den gegebenen Voraussetzungen die bestmögliche Gradbeschränkung nach unten ist, womit die Aussage in unserem Sinne scharf ist.

In jüngster Zeit ist das Interesse an algebraisch polynomiellen Schauderbasen in die Richtung von gradoptimalen Schauderbasen von $C[a, b]$ gerückt, die zudem in einer gewissen Orthogonalitätsbeziehung zueinander stehen. Diese Orthogonalitätsbeziehung ermöglicht es, für gegebenes $f \in C[a, b]$ die Koordinatenfunktionale $c_k(f)$ auf „einfache“ Art und Weise zu berechnen, ganz analog zu Orthonormalbasen in Hilberträumen. Für eine präzisere Ausdrucksweise und ein in dieser Richtung sehr weitreichendes Resultat verweisen wir den Leser auf die Dissertation von J. Schnieder aus dem Jahre 2010 [11].

Wie man im Laufe des letzten Kapitels bereits erkennen konnte, sind polynomielle Schauderbasen in $C[a, b]$ und $C_p[a - \pi, a + \pi]$ eng miteinander verknüpft. Es ist daher wenig überraschend, dass die Privalov'sche Bedingung für den trigonometrischen Fall (vergleiche Hauptsatz 4.7) ebenfalls scharf ist. Auch im Bezug auf orthogonale gradoptimale Schauderbasen in $C_p[a - \pi, a + \pi]$ wurden ähnliche weitreichende Resultate wie für $C[a, b]$ erzielt (siehe zum Beispiel [8]).

Literaturverzeichnis

- [1] S. V. Bochkarev. Construction of a dyadic interpolation basis in the space of continuous functions using fejer kernels. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (english translation)*, 172:29–64, 1985.
- [2] P. L. Butzer und R. J. Nessel. *Fourier analysis and approximation*, volume 1. Academic Press, New York, London, 1971.
- [3] N. L. Carothers. *A short course on Banach space theory*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Melbourne, 2005.
- [4] P. Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Mathematica*, 130(1):309–317, 1973.
- [5] G. Faber. Ueber die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 23:192–210, 1914.
- [6] K. Koenigsberger. *Analysis 1*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 6. Auflage, 2004.
- [7] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, und Y. Makovoz. *Constructive approximation - advanced problems*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [8] R. A. Lorentz und A. A. Sahakian. Orthogonal trigonometric Schauder bases of optimal degree for $C(K)$. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 1(1):103–112, 1994.
- [9] Al. A. Privalov. Growth of the degrees of polynomial bases and approximation of trigonometric projectors. *Matematicheskije Zametki (translated into English)*, 42(2):619–623, 1987.
- [10] Al. A. Privalov. Growth of the degrees of polynomial bases. *Matematicheskije Zametki (translated into English)*, 48(4):1017–1024, 1989.
- [11] J. Schnieder. *Gradoptimale Schauder-Basen mit Jacobi-Polynomen*. Logos Verlag, Berlin, 2010.
- [12] I. Singer. *Bases in Banach spaces 1*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
- [13] R. A. DeVore und G. G. Lorentz. *Constructive approximation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [14] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4. Auflage, 2005.